数学物理方法

上海交通大学数学科学学院
李松挺
Email: songting@sjtu.edu.cn

课件：唐异垒老师
ftp://public.sjtu.edu.cn/
user:mathtyl
pw:public

课程介绍

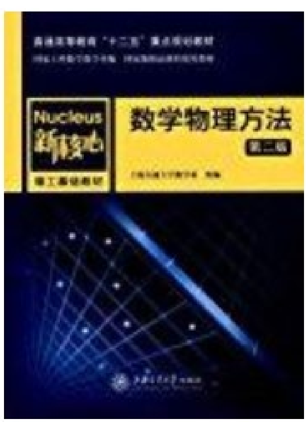
考核

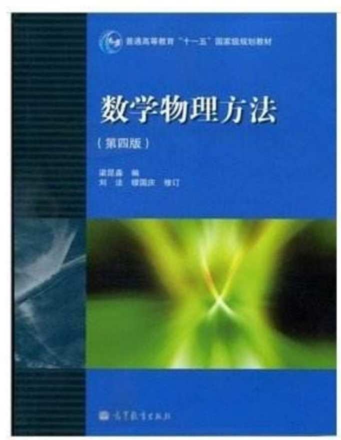
平时成绩 30%， 期末成绩70%

教科书

数学物理方法 上海交大出版社 上海交通大学数学系组编

数学物理方法 高等教育出版社 梁昆淼编 （参考）





第一章 复数

复数的起源

$$N \to Z \to Q \to R \to C$$

Tartaglia

Cardano

§ 1.1 复数

1.1.1 复数的基本概念

复数的定义（代数式）： 每个复数具有 $z=x+iy$ 的形状，其中x和y是实数，i是虚数单位(-1的平方根)。x和y分别称为z的实部和虚部，分别记作：

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

注1： **复数相等, 即**两复数实部与虚部分别相等.

注2： 两复数不可以比较大小.

特殊复数

- 如果 Imz=0，则z看成一个实数；
- 如果 Imz不等于零，那么称z为一个虚数；
- 如果 Imz不等于零，而Rez=0，则称z为一个纯虚数。

1.1.2 复数的共轭运算与四则运算

$$z=x+iy\ ,\quad \bar{z}=x-iy, x, y\in R$$

$$(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

复数在四则运算这个代数结构下，构成一个数域(对加、减、乘、除运算封闭，对加乘具有交换律、结合律与分配律，加乘具有单位元与逆元），称为复数域，记为C，复数域可以看成实数域的扩张。

1.1.3 复数的几何意义

一个复数 $z=x+iy$ 本质上由一对有序实数对(x, y)唯一确定。作映射：

$$C \to R^2 : z = x + iy \mapsto (x, y)$$

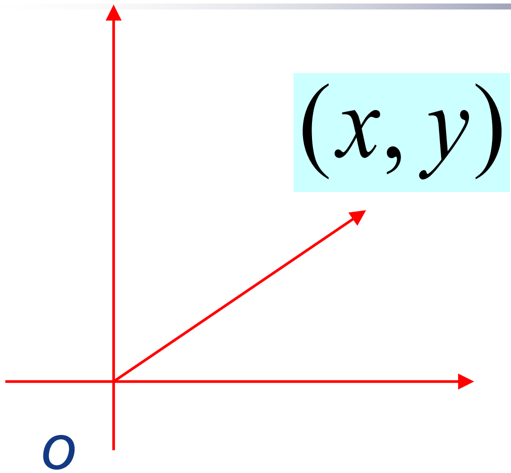
1-1对应（双射）

复数域C也可以理解成平面RxR，我们称C为复平面.

平面上横坐标轴称为实轴，纵坐标轴称为虚轴.

注：C中“数”与复平面上“点”看作等同。

复数的向量表示



C上向量与复数$z=x+iy$也构成一一对应的关系，则复数可以等同于平面中的向量等价类(在平移关系下)。向量的长度称为复数的**模**，定义为

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Z与正实轴之间的夹角称为复数的**辐角**，定义为:

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta + 2k\pi \subset R$$ ，K为整数.

注1： z=0时辐角无意义。 $z \neq 0$时$Argz$为无穷多值函数，辐角的多值性是很多复变函数多值性的根源.

注2： 两个复数相等的充要条件: 它们模相等, 辐角相差 $2k\pi$.

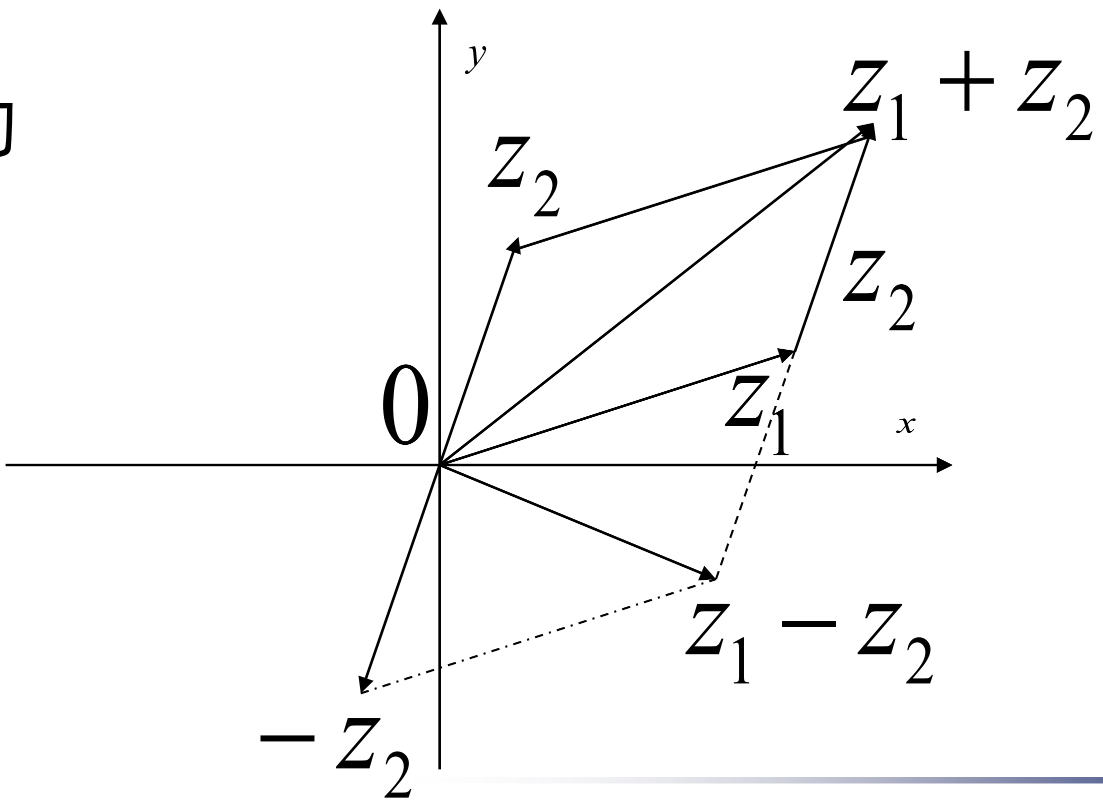
辐角主值*argz*：取*Argz*的一个属于$(-\pi,\pi]$之间的特殊值.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & x=0, y>0,\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geq 0,\\[2ex] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0,\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0.\end{cases}$$

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$$

注: C中“复数”与复平面上对应的“向量”看作等同.

复数加、减法的几何意义如图:



复数的三角表示及指数表示

非零复数的三角表示定义为：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r = |z|, \theta = Argz$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad x \in R.$$

从而得到复数的**指数形式**（ **Euler 公式** ）：

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

复数乘、除法的几何意义:

$$z_k = |z_k|(\cos Argz_k + i\sin Argz_k), \quad k = 1,2 \Rightarrow$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(Argz_1 + Argz_2) + i\sin(Argz_1 + Argz_2)]$$

即 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2.$$

注：后一个式子应理解为集合相等。

同理，对除法，也有：

$$z_1/z_2 = |z_1|/|z_2|[\cos(Argz_1 - Argz_2) + i\sin(Argz_1 - Argz_2)],\ z_1z_2 \neq 0$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

$$Arg(z_1/z_2) = Argz_1 - Argz_2$$

注：后一个式子应理解为集合相等。

思考题：说明iz的几何意义？

1.1.4 复数的乘幂与开方

作为乘积的特例,考虑非零复数 z 的整数次幂 z^n,利用三角表示,设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 得n次乘幂

$$z^n=|z|^n(\cos nArgz+i\sin nArgz)$$
$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

当 r=1时, 得 De Moivre 公式:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

类似的，令$z^{-n}=\dfrac{1}{z^{n}}$，则得负幂方

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-nArgz)+i\sin(-nArgz)]$$

$$=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)].$$

求非零复数z的n次方根, 相当于解二项方程

$$w^n = z \quad (\text{整数} n \geq 2, z \neq 0).$$

记其根总体为 $\sqrt[n]{z}$ ，利用指数表示式 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ 来求解, 有

$$(\rho e^{i\varphi})^n = re^{i\theta} \Rightarrow \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}.$$

则得z的n次方根:

$$\mathrm{w_k} = (z^{\frac{1}{n}})_{\mathrm{k}} = \sqrt[n]{\mathrm{r}}[\cos(\frac{\theta + 2\mathrm{k}\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2\mathrm{k}\pi}{n})]$$

$$= \sqrt[n]{\mathrm{r}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{\mathrm{n}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\mathrm{k}\pi}{n}}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

例：求 $\sqrt[6]{(1+i)}$

解：由于

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

所以有

$$\sqrt[6]{(1+i)}=\sqrt[12]{2}[\cos\frac{1}{6}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin\frac{1}{6}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]$$

$$=\sqrt[12]{2}[\cos(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3})]$$

k=0, 1, 2, 3，4，5 时有6个根.

练习: 1的n次方根公式?

1.1.5 基本（不）等式

关于两个复数的和与差的模、共轭，有以下（不）等式：

$(1)\overline{\overline{z}} = z$ $(2) z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$ $(3) z-\overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$

$(4) |z|^2 = z\overline{z}$ $(5) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$(6) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $(7) |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$(8) |z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$

$(9) \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \le \sqrt{2}|z|$

$(10) ||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$

复数在几何上应用举例

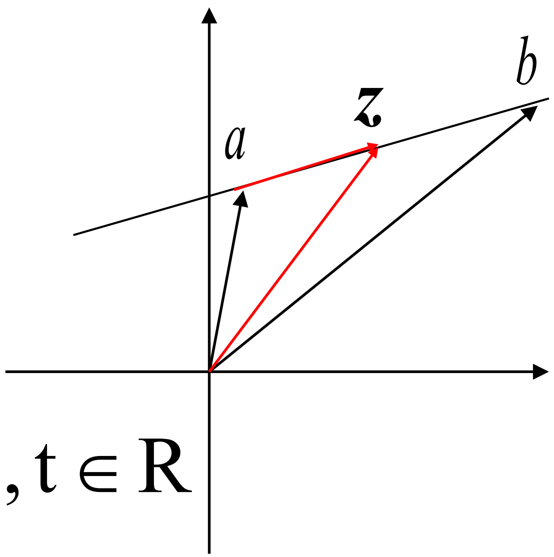
(1) 曲线的复表示 $\leftrightarrow$ 实表示

$$\begin{cases} z = x + \mathrm{i}y, \\ \overline{z} = x - \mathrm{i}y, \\ z\overline{z} = x^2 + y^2. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = z + \overline{z}, \\ 2\mathrm{i}y = z - \overline{z}. \end{cases}$$

例：作C上不同两点*a,b*的直线*l*表示式

因为对*l*上任意*z*, 向量 $\overrightarrow{za}$ 与 $\overrightarrow{ab}$ 在同一方向上或者反方向,则

$$\arg\frac{z-a}{b-a}=0,\pi \Leftrightarrow \frac{z-a}{b-a}\in \mathrm{R}$$



$$\text{直线}:\mathrm{Im}\frac{z-a}{b-a}=0$$

或者参数表示：$z=a+t(b-a),t\in \mathrm{R}$

$$\text{注}:a,b,c\text{三不同点共线条件}\frac{c-a}{b-a}\in \mathrm{R}$$

练习：用复数表示圆的方程？

§ 1.2　平面点集和区域

点集：由复平面上有限个或无限个点（按某一规则）组成的集合。

设$a \in C, r \in (0,+\infty)$,

a的r**邻域**(或以为a圆心以r为半径的圆盘U(a,r)）为：

$$\{z \,||\, z-a \,|< r, z \in C\},$$

以a为圆心，以r为半径的**闭圆盘** $\overline{U}(a,r)$ 定义为：

$$\{z \,||\, z-a \,|\le r, z \in C\},$$

a的r**去心邻域**定义为：

$$\{z \,|\, 0 <| z-a \,|< r, z \in C\}.$$

设点集$E \subset C$,点$a \in C$.

(1)若$\exists r > 0$, $\mathrm{U}(a,r) \subset E$,则称$a$为$E$的内点.

(2) 若$\exists r > 0$, $\mathrm{U}(a,r) \cap E = \varnothing$,则称$a$为$E$的外点.

(3)$\forall r > 0, U(a,r) \cap E$中有无穷个点,则称a为E的极限点或聚点.

(4) $\forall r > 0, U(a,r)$中既有$\in$ E又有$\notin$ E的点,

则称a为的E边界点. 集E的全部边界点所组成的集合称为E的边界,记为∂E.

注1: 内点一定属于E, 但是外点一定不属于E.

注2: 内点一定是聚点, 但是外点一定不是聚点.

所有点为内点的集合称为开集.

或者没有聚点，或者所有聚点都属于它的集合称为闭集.

如果存在 $r>0$，使得 $E \subset U(0,r)$ 则称 ***E*** 是有界集，否则称 ***E*** 是无界集.

例：复平面、实轴、虚轴是无界集；复平面是无界开集（区域）.

复平面C上的集合D，如果满足：

（1）D是非空开集；

（2）D具有**连通性**，即D中任意两点可以用完全属于D 的折线连起来;

则称D是一个**区域**.

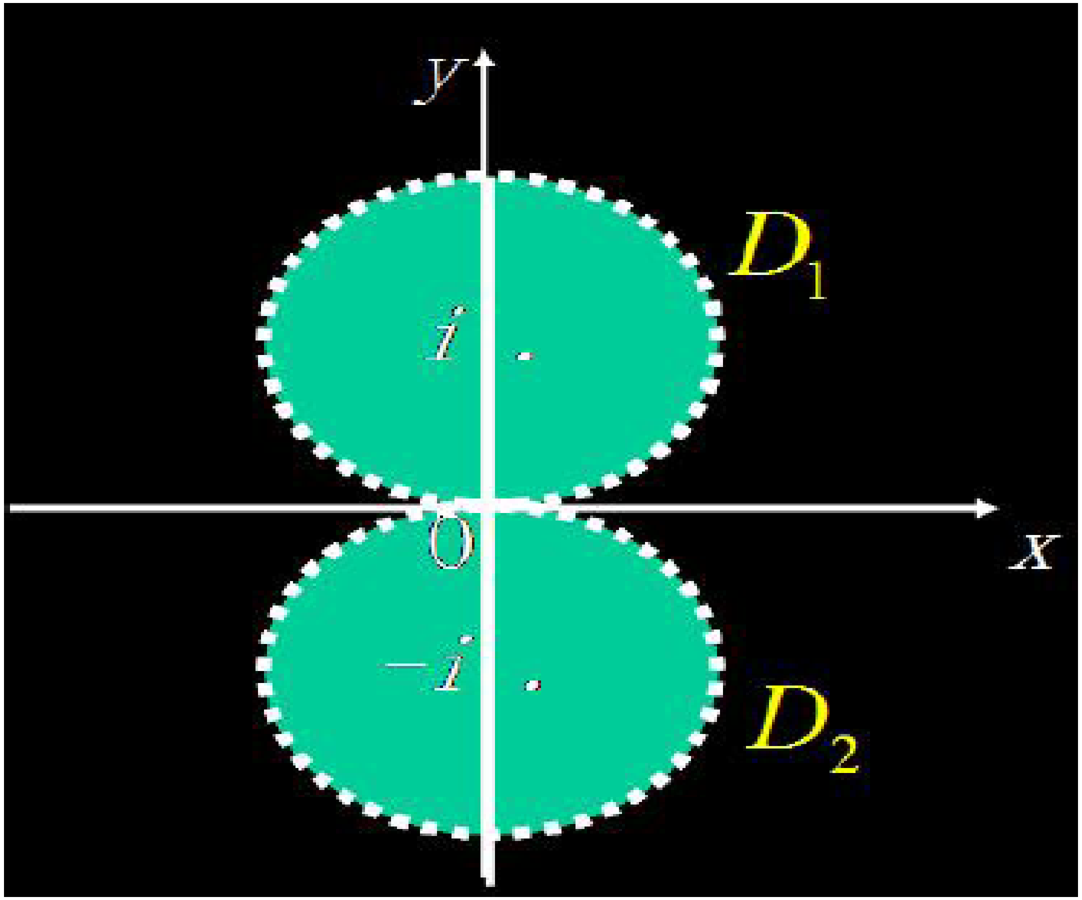
闭(区)域：包括边界点的区域，即 $\overline{D} = D \cup \partial D$.

一般说区域就是指开的.

结合前面的定义，可以定义有有界区域、无界区域.

注: 开集不一定是区域，例如

$$D=\{|z-i|<1\}\cup\{|z+i|<1\}$$



曲线

称 $L: z = z(t) = x(t) + iy(t), (a \le t \le b)$ 为一条**连续曲线**如果x(*t*)和y(*t*)都是闭区间[*a*,*b*]上连续实函数.

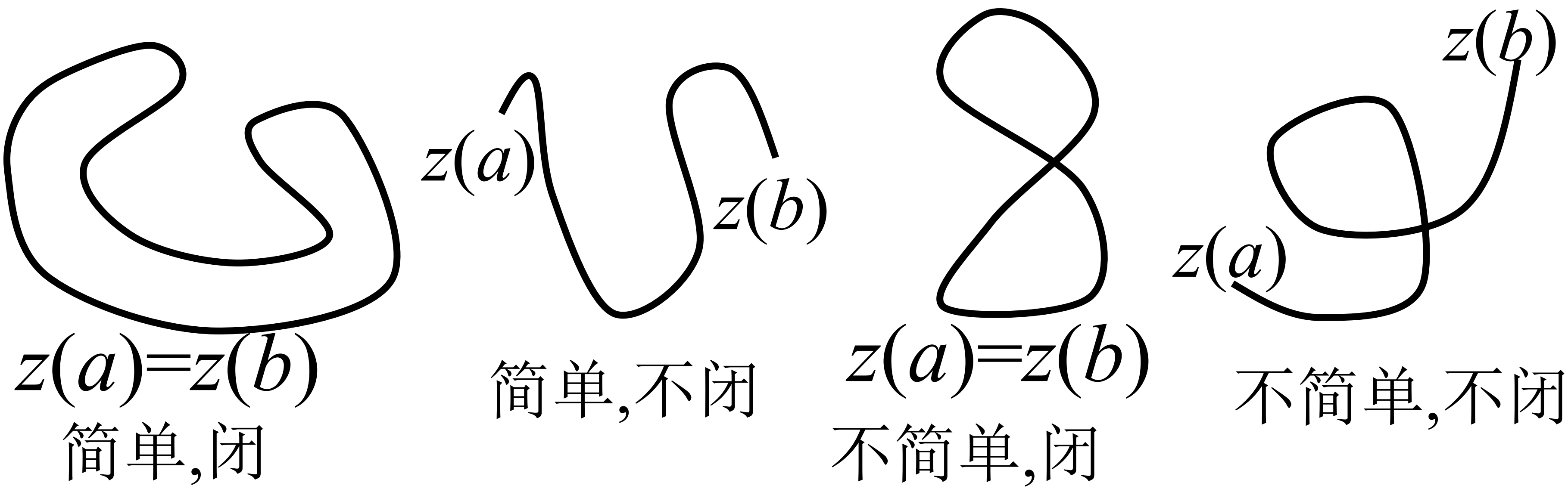
$z(a), z(b)$称为L的**端点**（起、终点）。

如果对[*a*,*b*]上任意不同两点*t*及*s*，且不全是a或b，有:

$$z(t) = z(s)$$

则称$z(t)$是重点。

无重点的连续曲线（即除端点外不自交），称为**简单连续曲线**，或**Jordan曲线**；若还有$z(a)=z(b)$，则称L为一条**简单连续闭曲线**，或**Jordan闭曲线**。


z(a)=z(b)
简单,闭
z(a)
z(b)
简单,不闭
z(a)=z(b)
不简单,闭
z(b)
z(a)
不简单,不闭

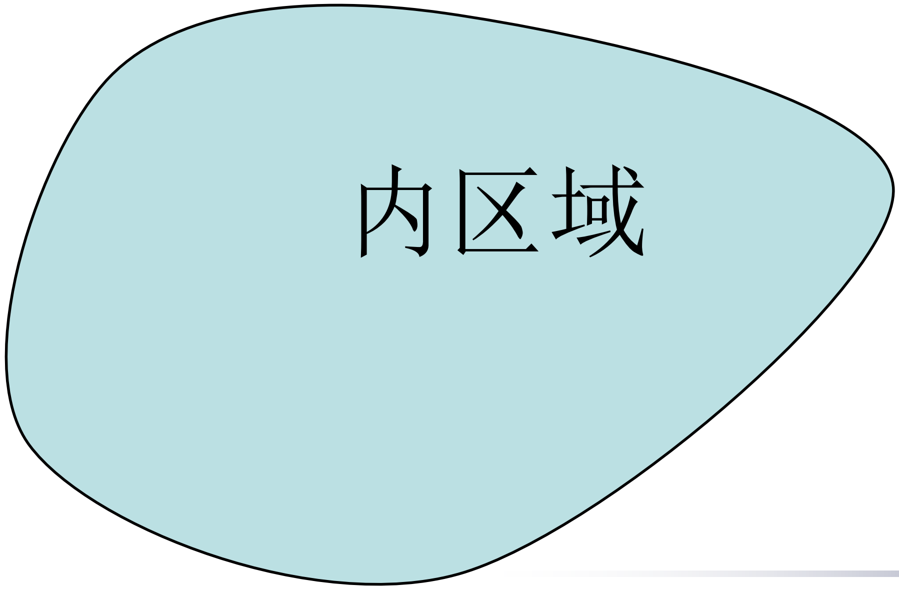
设 $L: z = z(t) = x(t) + iy(t), (a \le t \le b)$

如果x(*t*)和y(*t*)都在闭区间[*a*,*b*]上连续，且有连续的导函数，且至少其一导函数恒不为零，则称此曲线为一条光滑曲线。

类似地，可以定义逐段光滑曲线。

Jordan定理

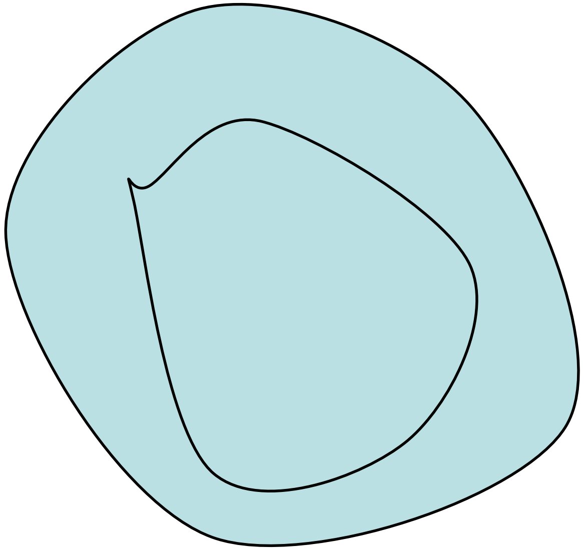
任意一条Jordan闭曲线把整个复平面分成两个没有公共点的区域：一个有界的称为内区域，一个无界的称为外区域。

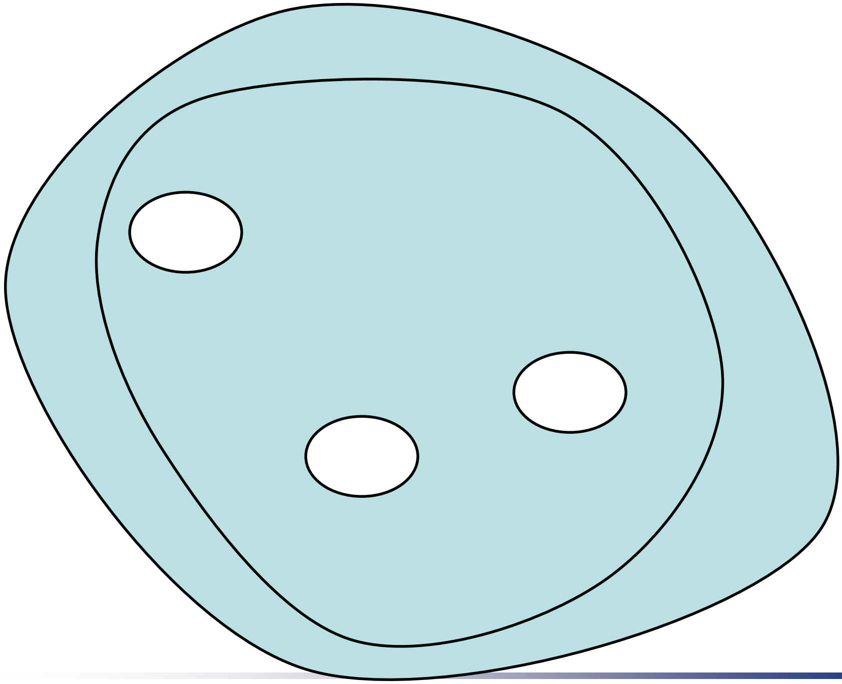


区域的连通性

设D是一个区域，在复平面C上，如果D内任何简单闭曲线所围成的内区域中每一点都属于D，则称D是单连通区域。

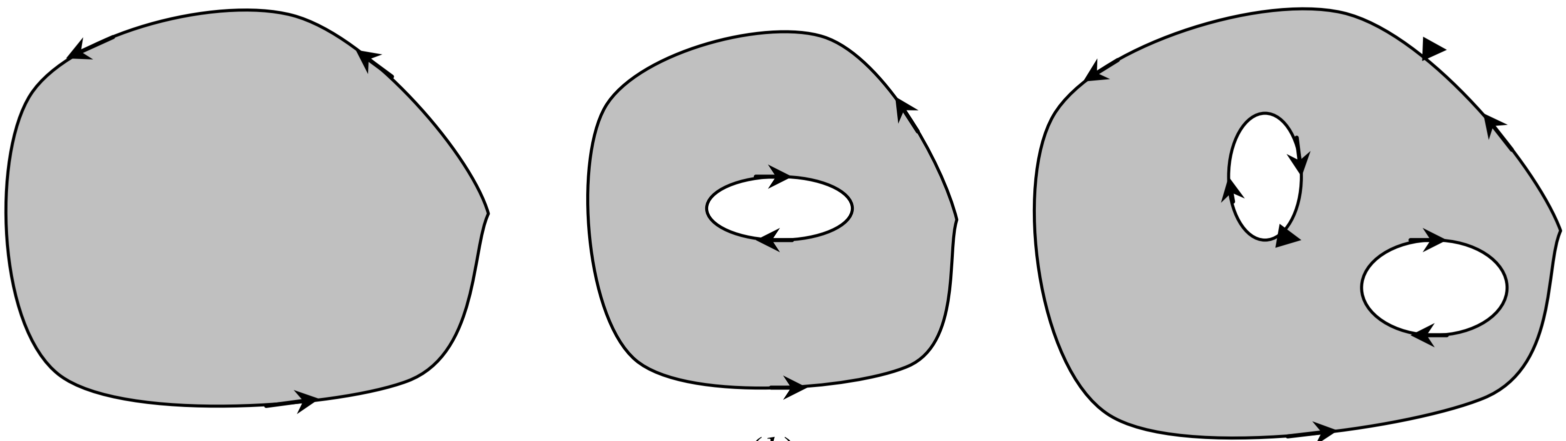
否则称D是多连通区域。





区域边界线的正方向

为了以后学习环路积分方便，按照通常的规定：（当人）沿边界线环行时，所包围的区域始终在人的左手边，则前进方向为边界线的正方向. 对于有界的单连通区域，如下图 **(a)** 的逆时针方向所示即为正方向. 而多连通区域单连通化后，外围逆时针为正方向，内部顺时针为正方向，如图 **(b),(c)**所示.



（a）　(b)　(c)

区域边界线的正方向

区域的判断方法及实例分析

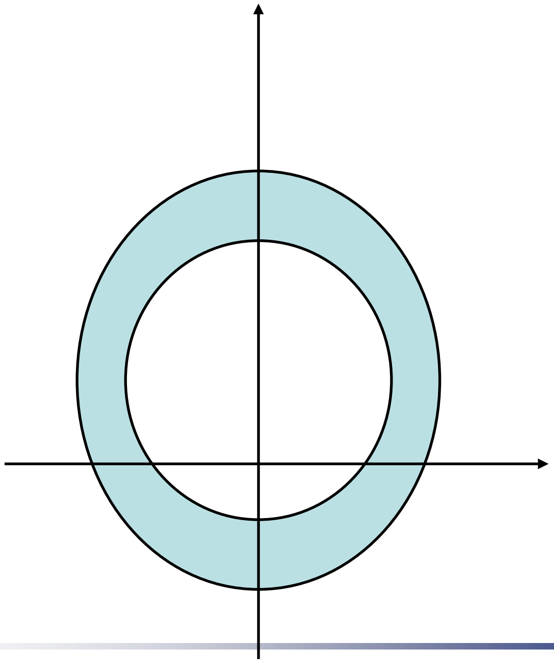
当判断区域是什么样的区域时，通常需要判断：（1）有、无界，(2)单、多连通，（3）开、闭区域.

点集 $\leftrightarrow$ 方程(或不等式) $\leftrightarrow$ 平面几何图形

例：集合 $\{z \mid 2 < |z-i| < 3\}$

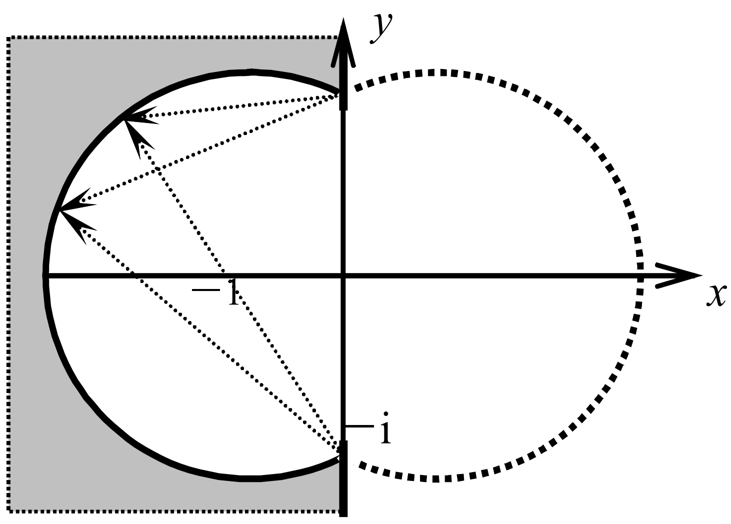
为一个圆环，它是一个多连通有界区域，其边界为圆：

$$|z-i| = 3,\ |z-i| = 2$$



例：试确定不等式 $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ 所确定的点集是什么图形？

解法一(几何).



[解法 1] 由此等式

$$\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4}$$

表示到两定点 i, –i 的张角之差等于定数 $\frac{\pi}{4}$ 的点 z 的集合.由平面几何的定理知，这是缺了点 i 和 –i 的两个圆弧.见图 1.10 所示，图中两个圆弧实际上只有实线圆弧才是 $\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4}$ 所确定的点集；虚线圆弧是 $\arg\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=\frac{\pi}{4}$ 所确定的点集.

再考虑等式 $\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}=0$ 确定的点集.实际上，此点集是虚轴上点 i 以上，点 –i 以下的点的全体。

从图中看出可见，该点集和图 1.10 中实线圆弧将整个平面分为两半. 容易验证，左边的部分除去圆域（即图中淡灰色）为不等式 $0<\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\frac{\pi}{4}$ 所确定的点集.

解法二（分析）

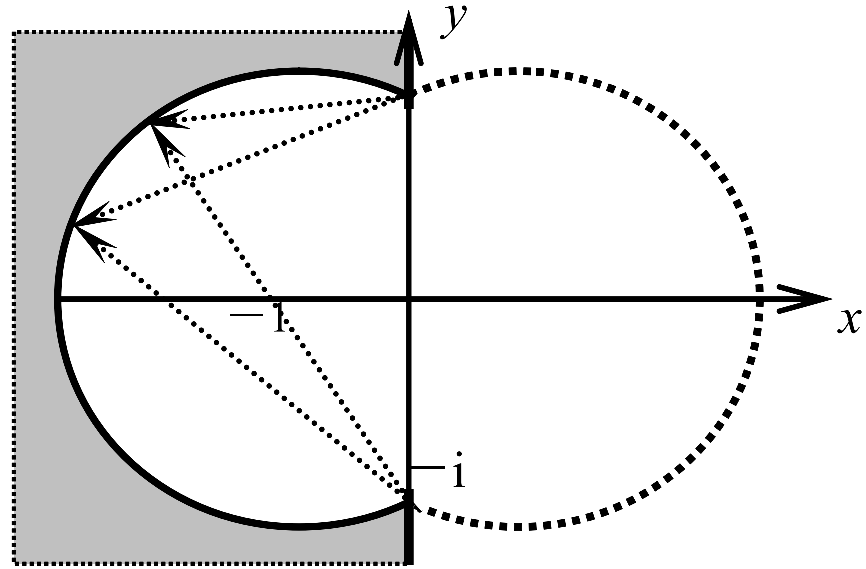
设 $z = x + iy$. 注意到，在 $(0, \pi/4)$ 的角度区域，正切函数是单增的，对上述不等式两边均取正切得到

$$0 < \frac{-2x}{x^2 + y^2 - 1} < 1$$

由此得到 $\begin{cases} x < 0 \\ (x+1)^2 + y^2 > 2 \end{cases}$

因为 $(0, \pi/4)$ 在 I 象限，

则 $-2x > 0$, $x^2 + y^2 - 1 > 0$.



左边的部分除去圆域（即图中淡灰色）为不等式所确定的点集.

1.3 复函数与复映射

1.3.1 复变函数的概念

定义： 设 D 是一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的集合，若对每一个 $z \in D$，按照一定的法则，总有一个或几个复数 $w = u + \mathrm{i}v$ 与之对应，则称复变量 w 为复数 z 的复变函数，记为：$w = f(z)$.

其中 D 称为 $f(z)$ 的定义域，函数值 w 的全体所构成的集合称为 $f(z)$ 的值域，记为 $f(D) = \{w \mid w = f(z), z \in D\}$.

定义： 反过来, 若对每一个 $w \in f(D)$，按照同样的法则, 有一个或几个复数 $z \in D$ 与之对应, 则得到 z 为 w 的复变函数, 记为: $z = f^{-1}(w) = g(w)$，成为 $w = f(z)$ 的反函数.

定义： 每个自变量复数 z，对应着一确定的复数 w 称 $w = f(z)$ 为**单值函数**.

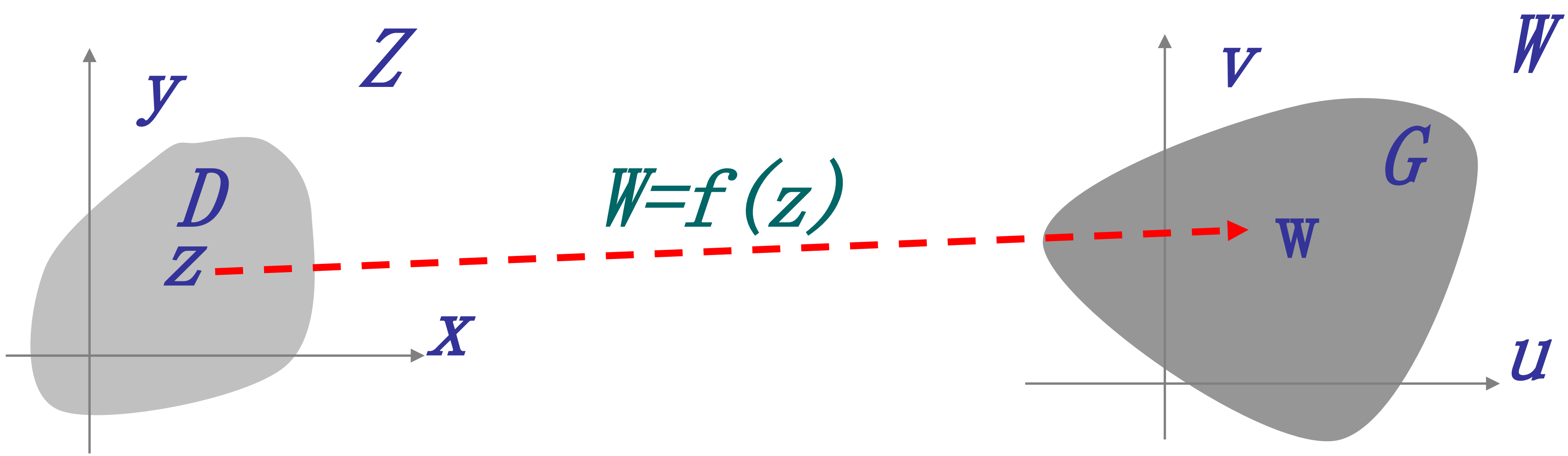
每一个自变量复数 z，对应着几个或无穷多个复数 w 的值，则称 $w = f(z)$ 为**多值函数**.

注： 单值函数并不排斥不同的两点 z_1 与 z_2 可以对应着同一复数 w. 例如 $w = f(z) = z^2$ 是这样一个单值函数.

它的反函数 $z = \sqrt{w}$（称为根式函数），w 为自变量，z 为因变量，由于 w 平面上每个点对应于 z 平面上两个不同的点，因此 $z = \sqrt{w}$ 是一多值函数.

1.3.2 映射的概念

函数 $w=f(z)$ 在几何上可看做是把 z平面上的一个点集D(定义集合)变到 w平面上的一个点集G (函数值集合)的映射(或变换). 如果 D 中的点 z 被映射 $w=f(z)$ 映射成 G中的点 w, 则 w 称为 z 的象, 而 z 称为 w 的原象.



如果函数(映射) $w=f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z=\varphi(w)$都是单值的, 则称函数(映射) $w=f(z)$是一一的. 此时, 我们也称集合D与集合G是1-1对应的.

1.3.3 复变函数与实函数

复函数

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

其确定了自变量为x和y的两个二元实变函数 u ,v .

例：单值函数 $w = z^2$.

令 $z = x+iy$, $w = u+iv$，则

$$u+iv = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy,$$

因而函数 $w = z^2$ 对应于两个二元函数:

$$u = x^2-y^2,\ v = 2xy$$

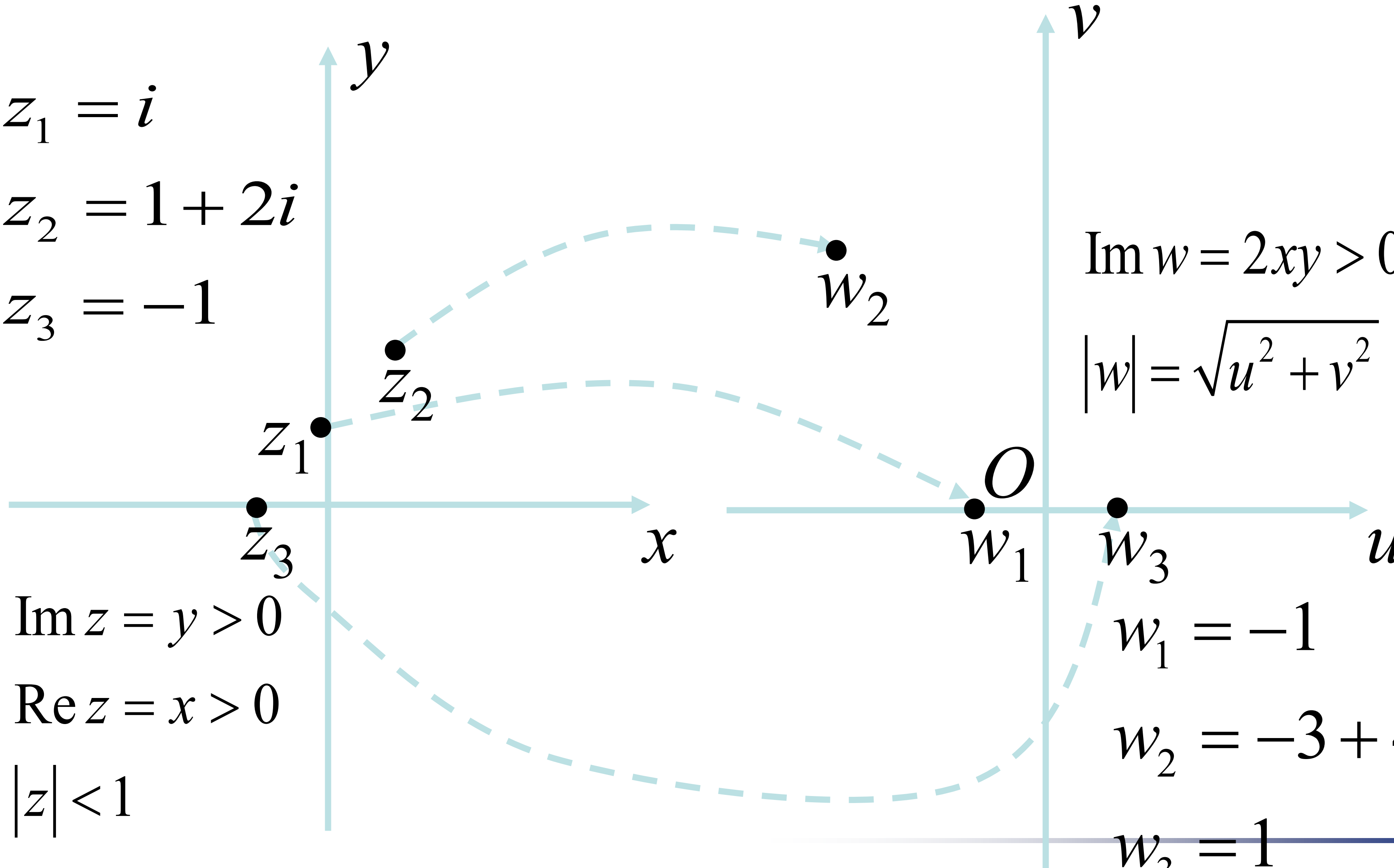
设函数 $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$,

有 $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$

$z_1 = i$

$z_2 = 1 + 2i$

$z_3 = -1$



$\operatorname{Im} w = 2xy > 0$

$|w| = \sqrt{u^2 + v^2} < 1$

$\operatorname{Im} z = y > 0$

$\operatorname{Re} z = x > 0$

$|z| < 1$

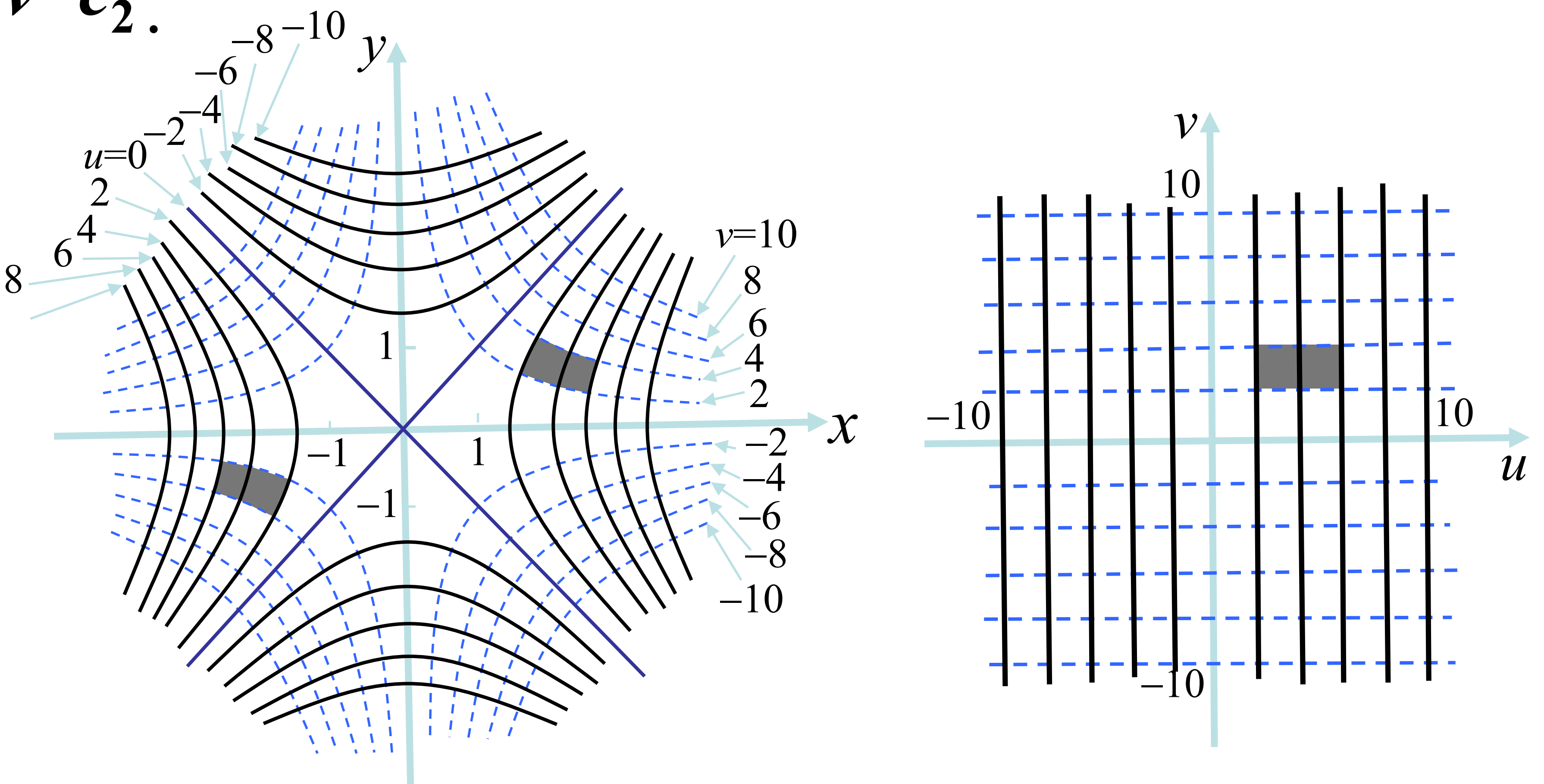
$w_1 = -1$

$w_2 = -3 + 4i$

$w_3 = 1$

函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$u=x^2-y^2$，$v=2xy$ 把 z 平面上的两族双曲线 $x^2-y^2=c_1$，$2xy=c_2$ 分别映 射成w平面上的两族平行直线 $u=c_1$，$v=c_2$.



举例：曲线在映射下的像

例1. $w = 1/z.$

$$C: x^2 + y^2 = 8 \xrightarrow{w=1/z} \Gamma ?$$

$$z = x + iy = \frac{1}{w} = \frac{1}{u+iv}$$

$$\Rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2}, y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma: u^2 + v^2 = \frac{1}{8}$$

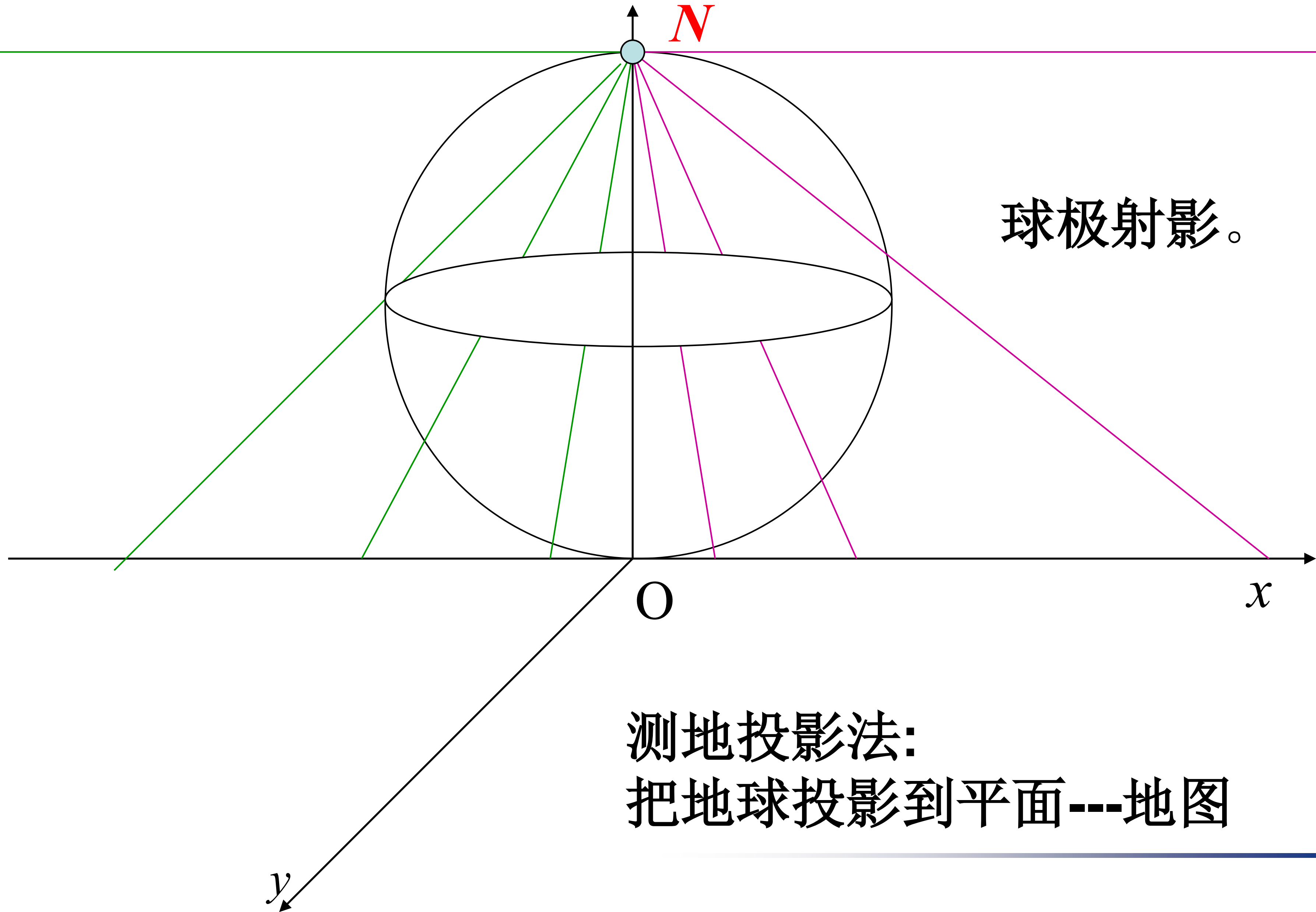
例2

$$C: z=(2+i)t \xrightarrow{w=z^2} \Gamma ? \quad t \in \mathbf{R}$$

$$w=[(2+i)t]^2=(3+4i)t^2$$

$$\Rightarrow \Gamma: v=\frac{4}{3}u$$

§ 1.4 扩充复平面的几何意义
---复球面

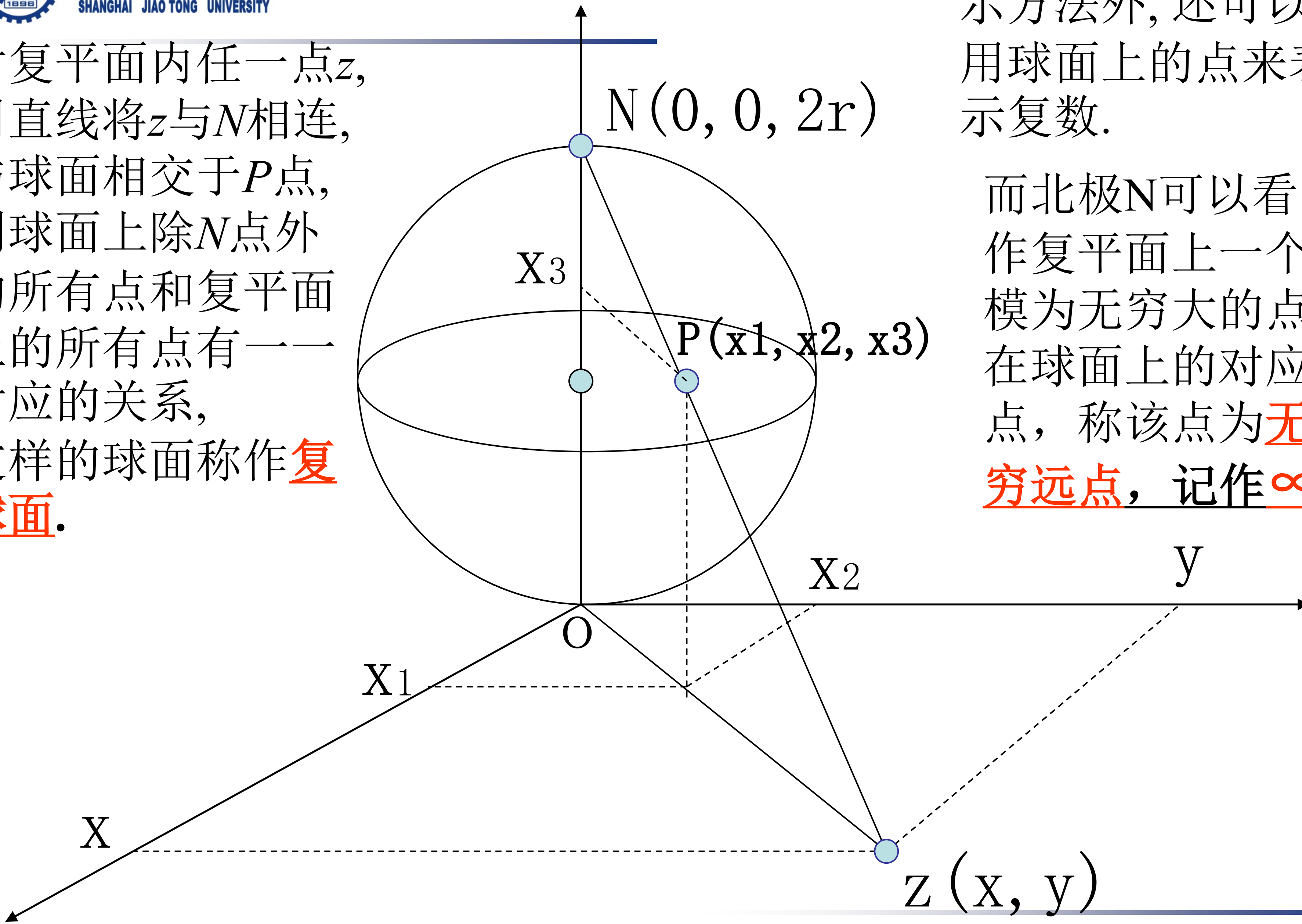


球极射影。

测地投影法:
把地球投影到平面---地图

对复平面内任一点z，用直线将z与N相连，与球面相交于P点，则球面上除N点外的所有点和复平面上的所有点有一一对应的关系，这样的球面称作**复球面**.

除了复数的平面表示方法外，还可以用球面上的点来表示复数.



而北极N可以看作复平面上一个模为无穷大的点在球面上的对应点，称该点为**无穷远点，记作∞**。

无穷远点的邻域

对一切$r>0$,集合 $\{z \mid |z| > r, z \in C_\infty\}$

称为无穷远点的一个r 邻域.

注1：在扩充复平面上，不含无穷远点的区域的定义同上；含无穷远点的区域一定包含无穷远点的一个邻域.

注2：除非特别指明，一般所说的复平面都是指不包括无穷远点 ∞在内的非扩充复平面.

注3：扩充复平面 $\overline{C}$ ---包括无穷远点 ∞ 在内的复平面. 对于∞来说，实部，虚部和辐角的概念均无意义。 复平面上的直线，圆周对应于复球面上的圆周。

模等于： $$|\infty| = +\infty$$

约定： $$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{a}{0} = \infty (a \neq 0); \quad \frac{a}{\infty} = 0 (a \neq \infty)$$

这些运算无意义： $$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \infty / \infty, 0 / 0.$$

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

It’s The End！

Thank You！

作业：习题一

一：1,(2)(4)(6)；2,(2)(3)；
3,(1)（4）(6)；4,(1);
7,(3);8,(8); 9；12；
二：3，8.