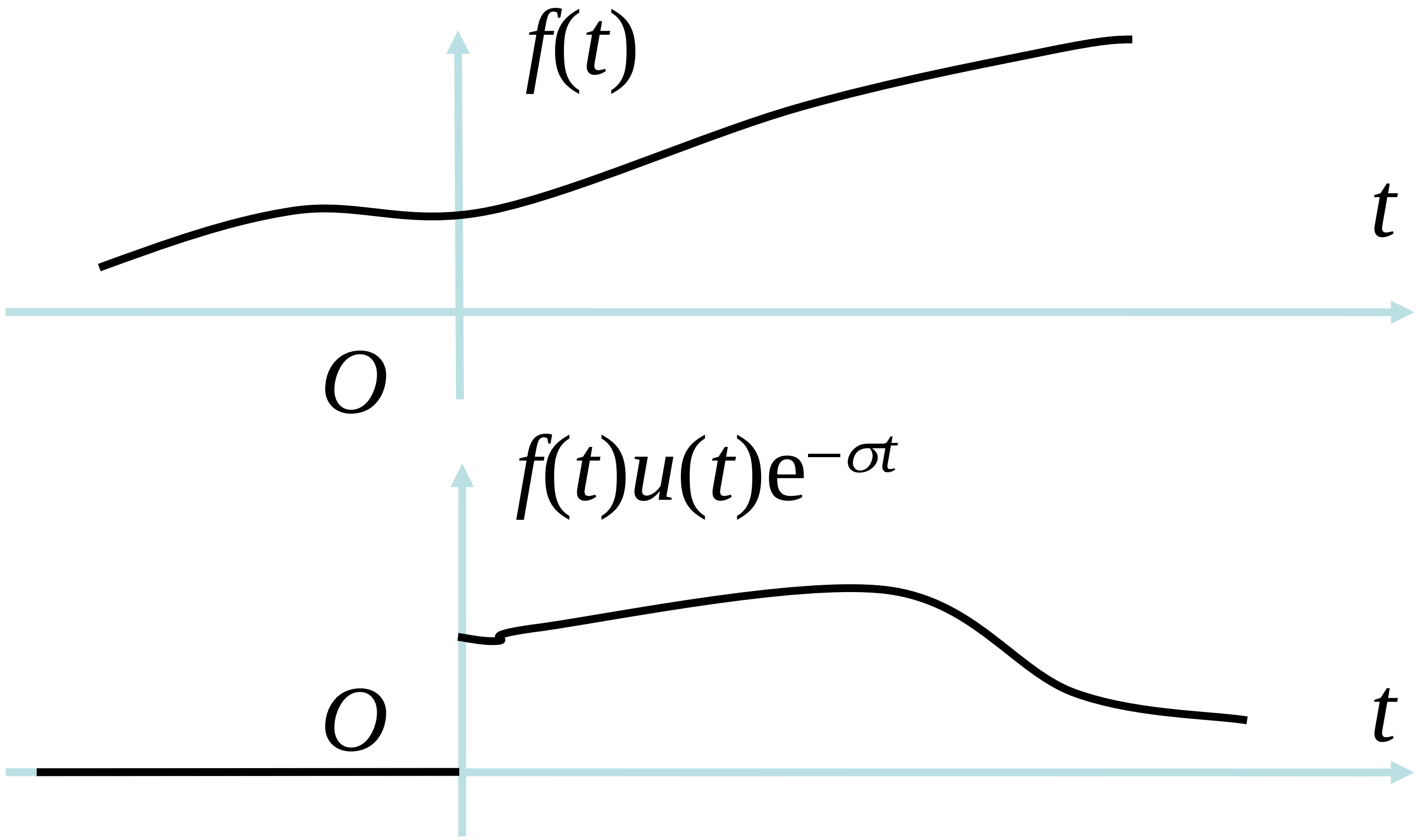
第八章 Laplace变换

上海交通大学数学系 唐异垒

§8.1 Laplace变换的概念



$$F[f(t)u(t)e^{-\sigma t}]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt$$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (p=\sigma+i\omega)$$

8.1.1 Laplace变换的定义

设$f(t)$是$[0,+\infty)$上的实(或复)值函数，若对复数$p=\sigma+i\omega$, $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$在$p$平面的某一区域内收敛，则称其为$f(t)$的Laplace变换，记为

$$\mathscr{L}[f(t)](p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

$f(t)$称为$F(p)$的Laplace逆变换，记为$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$

$F(p)$称为像函数，$f(t)$称为原像函数.

定义(指数级函数):

对实变量的复值函数$f(t)$,若存在$M>0$及实数σ_c,使得

$$|f(t)|\le Me^{\sigma_c t},\quad \forall t\ge 0$$

则称$f(t)$为指数级函数，σ_c称为增长指数

例如:

$$|u(t)|\le 1\cdot e^{0\cdot t}, M=1, \sigma_c=0;$$

$$\left|e^{kt}\right|\le 1\cdot e^{(\mathrm{Re}\,k)\cdot t}, M=1, \sigma_c=\mathrm{Re}\,k;$$

$$|\sin kt|\le 1\cdot e^{|k|\cdot t}, M=1, \sigma_c=|k|;$$

$$\left|t^n\right|\le n!\cdot e^{t}, M=n!, \sigma_c=1.$$

非指数级函数，如 $e^{t^{3/2}}$.

8.1.2 Laplace变换存在定理

设$f(t)$， $t\geq 0$满足：

- $f(t)$在$t\geq 0$的任一有限区间上分段连续；
- $f(t)$是指数级函数(增长指数为σ_c)；

则在半平面$\mathrm{Re}\, p=\sigma>\sigma_c$内必存在$f(t)$的Laplace变换$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$,且积分绝对收敛，函数$F(p)$解析.

证明：(积分的绝对收敛性）

设$|f(t)| \le Me^{\sigma_c t} \Rightarrow$

$$|F(p)| \le \int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-pt}| dt \le \int_0^{+\infty} Me^{\sigma_c t} e^{-\sigma t} dt$$

$$= M\int_0^{+\infty} e^{-(\sigma-\sigma_c)t} dt = \frac{-M}{\sigma-\sigma_c} e^{-(\sigma-\sigma_c)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{M}{\sigma-\sigma_c} \qquad (\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_c).$$

注：当$f(t)$满足定理条件时，$\lim\limits_{\mathrm{Re}\, p\to+\infty} F(p) = 0.$

(F(p)的解析性):

在Laplace变换式的积分号内对*p*求导, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,p}}\left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-tf(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

而 $|-tf(t)\mathrm{e}^{-pt}|\le Mt\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,p-\sigma_c)t}$.

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}\left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]\mathrm{d}t\le\int_0^{+\infty}Mt\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,p-\sigma_c)t}\mathrm{d}t\overset{(\mathrm{Re}\,p=\sigma>\sigma_c)}{=}\frac{M}{(\mathrm{Re}\,p-\sigma_c)^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}F(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-tf(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=L[-tf(t)].$$

--- 像函数的微分性质

注1：增长指数不唯一

记σ_0是使$|f(t)| \le Me^{\sigma_c t}(\forall t \ge 0)$成立的最小的增长指数，则称其为收敛坐标，称$\mathrm{Re}\, p = \sigma_0$为收敛轴，$F(p)$在$\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_0$内解析.

注2： 若$\mathrm{L}[f(t)] = F(p), \sigma_0$是$F(p)$的所有奇点的实部的最大值，则$\sigma_0$为收敛坐标

8.1.3 常用函数的Laplace变换

$$1.\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}\left(\operatorname{Re} p > 0\right)$$

或记$\mathcal{L}[1] = \dfrac{1}{p}$

$$2.\mathcal{L}\left[e^{kt}\right] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{(k-p)t}dt = \frac{e^{(k-p)t}}{k-p}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{p-k}\left(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} k\right)$$

$$3.\mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{p^2 + k^2} \left(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} k|\right),$$

$$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{p}{p^2 + k^2} \left(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} k|\right)$$

$$\mathcal{L}[\sinh kt] = \frac{k}{p^2 - k^2} \left(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} k|\right)$$

$$\mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{p}{p^2 - k^2} \left(\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} k|\right)$$

证明：

$$\mathrm{L}\left[\sin kt\right]=\int_0^{+\infty}\sin kt\, e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(p-ik)t}-e^{-(p+ik)t}}{2i}dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ik}-\frac{1}{p+ik}\right)$$

$$=\frac{k}{p^2+k^2}.$$

$$\left(\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}\, p>\mathrm{Re}(ik)=-\mathrm{Im}\, k\\ \mathrm{Re}\, p>\mathrm{Re}(-ik)=\mathrm{Im}\, k\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Re}\, p>\left|\mathrm{Im}\, k\right|\right).$$

$$4.\ \mathrm{L}\left[t^{\alpha}\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}\ (\alpha>-1,\mathrm{Re}\,p>0)$$

$\Gamma-$函数

•定义：$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\quad(s>0)$

•递推公式：$\Gamma(1)=1,$

$$\Gamma(s+1)=-\int_0^{+\infty}x^s de^{-x}=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\quad=s\Gamma(s)$$

$$\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!,\quad n\in\mathbf{N}$$

•$\alpha=n\in\mathbf{N}$时，$\mathrm{L}\left[t^{n}\right]=\dfrac{n!}{p^{n+1}}.$

•$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\overset{x=y^2}{=\!=}2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}.$

§8.2 Laplace变换的性质与计算

假设所涉及函数的 Laplace 变换都存在

1. 线性性：

设 $\mathrm{L}\left[f_i(t)\right]=F_i(p)\,(i=1,2)$,则

$$\mathrm{L}\left[a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\right]=a_1F_1(p)+a_2F_2(p),$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[b_1F_1(p)+b_2F_2(p)\right]=b_1 f_1(t)+b_2 f_2(t)$$

例: 求 sin (2*t*) sin (3*t*)的L-变换

$$\text{解:因为}\sin 2t\sin 3t=-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{i2t}-\mathrm{e}^{-i2t})(\mathrm{e}^{i3t}-\mathrm{e}^{-i3t})$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{i5t}-\mathrm{e}^{-it}-\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-i5t})$$

$$\mathrm{L}[\sin 2t\sin 3t]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-i5}-\frac{1}{p+i}-\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i5}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2p}{p^2+25}-\frac{2p}{p^2+1}\right)=\frac{-12p}{(p^2+25)(p^2+1)},\quad \mathrm{Re}\,p>0.$$

2.相似性：$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)\left(\operatorname{Re} p > \sigma_0\right), a > 0,$则

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad \left(\operatorname{Re} p > a\sigma_0\right)$$

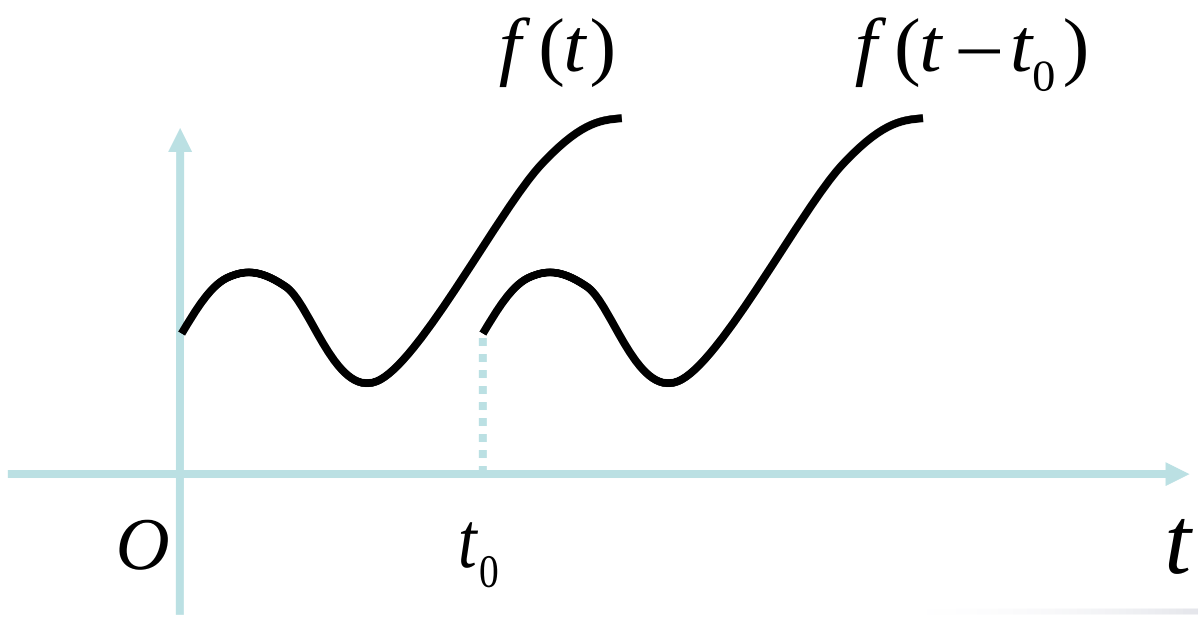
$$\mathcal{L}^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \quad \left(\operatorname{Re} p > \frac{\sigma_0}{a}\right)$$

3. 原像延迟性：

设$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(p)\left(\operatorname{Re}p>\sigma_0\right)$， 则

(1) $\mathcal{L}\left[f(t-t_0)u(t-t_0)\right]=e^{-pt_0}F(p) \quad \left(\operatorname{Re}p>\sigma_0\right)$;

(2) $\mathcal{L}^{-1}[e^{-pt_0}F(p)]=f(t-t_0)u(t-t_0)$.



例：

$$\mathrm{L}\left[(t-1)^2\right]=\mathrm{L}\left[t^2-2t+1\right]=\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}$$

$$\left(f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\(t-1)^2, & t>0\end{cases}\right).$$

$$\mathrm{L}\left[(t-1)^2\right]\overset{\text{延迟}}{=}e^{-p}\mathrm{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{p^3}e^{-p}$$

$$\left(f_2(t)\ =(t-1)^2u(t-1)=\begin{cases}0, & t<1\\(t-1)^2, & t>1\end{cases}\right).$$

4.像的平移性:

设 $\mathrm{L}[f(t)] = F(p)\left(\mathrm{Re}\, p > \sigma_0\right)$,

$\Rightarrow$

(1) $\mathrm{L}\left[e^{p_0 t} f(t)\right] = F(p - p_0)$

$\left(\mathrm{Re}(p - p_0) > \sigma_0\right)$,

(2) $\mathrm{L}^{-1}\left[F(p - p_0)\right] = e^{p_0 t} f(t)$.

例:

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-p\tau}}{(p-a)^{m+1}}\right], \qquad m \in \mathbb{R}$$

$$\overset{\text{延迟}}{=} u(t-\tau)\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)^{m+1}}\right)\Bigg|_{t-\tau}$$

$$\overset{\text{像平移}}{=} u(t-\tau)\left(e^{at}\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^{m+1}}\right)\right)_{t-\tau}$$

$$\overset{\text{线性}}{=} u(t-\tau)\left(e^{at}\frac{t^m}{\Gamma(m+1)}\right)_{t-\tau}$$

$$= u(t-\tau)\frac{(t-\tau)^m}{\Gamma(m+1)}e^{a(t-\tau)}.$$

5.微分性：$\mathcal{L}[f(t)]=F(p)(\mathrm{Re}\,p>\sigma_0)$,则

（1.像原）$\mathcal{L}[f'(t)]=pF(p)-f(0)\quad(\mathrm{Re}\,p>\sigma_0)$

（2.像）$\mathcal{L}^{-1}[F'(p)]=-tf(t)\quad(\mathrm{Re}\,p>\sigma_0)$

$$\left(\mathcal{L}[tf(t)]=-F'(p),\ f(t)=\frac{\mathcal{L}^{-1}[F'(p)]}{-t}\right)$$

高阶微分性：

$$(1)\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$(n=1,2,\cdots)\quad(\mathrm{Re}\,p>\sigma_0)$$

$$(2)\ \mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(p)\right]=(-t)^nf(t)$$

$$\left(\mathcal{L}\left[t^nf(t)\right]=(-1)^nF^{(n)}(p)\right)$$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

证明:(1)$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$

$$= f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$$\left(\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_0 : \left|f(t)e^{-pt}\right| \le Me^{-(\sigma-\sigma_0)t} \to 0, t\to+\infty\right)$$

$$=-f(0)+pF(p).$$

例:

$$\mathcal{L}\left[t^n\right] \overset{\text{像高阶微分}}{=} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\mathcal{L}[1]=(-1)^n\left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad \mathrm{n}\in\mathbf{N}.$$

例： 求函数 $f(t)=t\cdot\sin(kt)$的Laplace变换.

因为$\mathrm{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{p^2+k^2}$,

$$\mathrm{L}[t\sin kt]\overset{\text{像微分性}}{=}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{k}{p^2+k^2}\right]=\frac{2kp}{(p^2+k^2)^2}$$

同理可得

$$\mathrm{L}[t\cos kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{p}{p^2+k^2}\right]=\frac{p^2-k^2}{(p^2+k^2)^2},$$

$$\mathrm{L}\left[t^2\cos kt\right]=(-1)^2(\mathrm{L}\left[\cos kt\right])''(p)=\left(\frac{p}{p^2+k^2}\right)''=\frac{2p^3-6k^2p}{(p^2+k^2)^3}.$$

6. 积分性：$\mathrm{L}[f(t)] = F(p)\left(\mathrm{Re}\, p > \sigma_0\right)$，则

（1.像原） $\mathrm{L}\left[\int_0^t f(s)ds\right] = \dfrac{F(p)}{p} \quad \left(\mathrm{Re}\, p > \max(0, \sigma_0)\right).$

（2.像） 若$\int_p^{+\infty} F(z)dz$存在，则$\mathrm{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(z)dz\right] = \dfrac{f(t)}{t}$

$$\left(\mathrm{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](p) = \int_p^{+\infty} F(z)dz \left(\mathrm{Re}\, p > \sigma_0\right) \right).$$

$$(3)\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(z)dz.$$

证明:

(1) 令 $g(t)=\int_0^t f(s)ds, g'(t)=f(t), g(0)=0$

$$\mathcal{L}[g'(t)]=p\mathcal{L}[g(t)]-g(0) \quad \Rightarrow (1)$$

(2) $G(p)=\int_p^{+\infty} F(z)dz, G'(p)=-F(p)$

$$\mathcal{L}^{-1}[G'(p)]=-t\mathcal{L}^{-1}[G(p)] \quad \Rightarrow (2)$$

在(2)中取$p=0 \quad \Rightarrow (3)$.#

例:

$$\mathrm{L}\left[\int_0^t te^{-t}\sin 3t\,dt\right] \overset{\text{像原积分性}}{=} \frac{1}{p}\mathrm{L}\left[te^{-t}\sin 3t\right]$$

像微分性

$$= -\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left\{\mathrm{L}\left[e^{-t}\sin 3t\right]\right\}$$

像平移

$$= -\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left\{\mathrm{L}\left[\sin 3t\right]\Big|_{(p+1)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left\{\frac{3}{(p+1)^2+9}\right\} = \frac{6(p+1)}{p\left((p+1)^2+9\right)^2}$$

例：求积分

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \sin t \, dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{(t^3 \sin t)}_{f(t)} e^{-t} dt = F(1),$$

$$F(p) = L[f(t)]$$

$$= L[t^3 \sin t] \overset{\text{像原微分性}}{=} -\frac{d^3}{dp^3}\left(\mathrm{L}\left[\sin t\right]\right)\Big|_{(p)}$$

$$= -\frac{d^3}{dp^3}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{24p(p^2-1)}{(p^2+1)^4} \Rightarrow F(1) = 0.$$

例：求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} L[(1-\cos t)e^{-t}]\, dp$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \right) dp$$

$$= \ln \frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+1}} \Big|_0^{+\infty} = \ln \sqrt{2}$$

7. 卷积公式

卷积的概念

设 $f_1(t), f_2(t)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的函数, 若

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad 存在,$$

则称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 $[0，+\infty]$ 上的**卷积.**

注： 卷积满足交换律，结合律与对加法的分配律

卷积公式：

设$f_i(t)$满足Laplace变换存在定理条件，

$i=1,2,\cdots,n$，则$f_1*\cdots*f_n$的Laplace变换存在，

且 $\mathrm{L}[f_1*\cdots*f_n]=\mathrm{L}[f_1]\cdots\cdots\mathrm{L}[f_n]$

$$=F_1(p)\cdots\cdots F_n(p),$$

$$\left(\text{或：}\mathrm{L}^{-1}[F_1(p)\cdots\cdots F_n(p)]=f_1*\cdots*f_n\right).$$

注：卷积公式可用来计算逆变换或卷积。

例： $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$，求 $L^{-1}[F(p)]$

解法1：$\mathcal{L}^{-1}[F(p)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right]=t-\sin t$

解法2：$L^{-1}[F(p)]=L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2}\right]*L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right]=t*\sin t$

$$=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau\, d\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\int_0^t \cos(t-\tau)d\tau=t-\sin t.$$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

例: $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+2p+5)^2}$, 求 $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

$$F(p)=\frac{1}{[(p+1)^2+2^2]^2},$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+2^2}\right]\overset{\text{像平移}}{=}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\Rightarrow$$

$$\mathrm{L}^{-1}[F(p)]\overset{\text{卷积公式}}{=}\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+2^2}\right]*\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)^2+2^2}\right]$$

$$\overset{\text{像平移}}{=}\left(\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right)*\left(\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\int_0^t (e^{-\tau}\sin 2\tau)[e^{-(t-\tau)}\sin 2(t-\tau)]d\tau$$

$$=\frac{1}{8}e^{-t}\int_0^t(\cos(4\tau-2t)-\cos 2t)d\tau=\frac{1}{16}e^{-t}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$$

8. 求周期函数L-变换的简单方法, 即设$f_T(t)$ (t>0)是周期为T的周期函数Laplace变换, 如果

$$f(t)=\begin{cases} f_T(t) & 0\le t<T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

且$\mathscr{L}[f(t)]=F(p)$, 则

$$\mathscr{L}[f_T(t)]=\frac{F(p)}{1-\mathrm{e}^{-pT}}$$

Laplace变换积分下限

L-变换存在定理条件的函数*f*(*t*)在*t*=0处有界时，积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

中的下限取0^+或0^-不会影响其结果. 但如果*f*(*t*)在*t*=0处包含脉冲函数时，这里默认是0^-.

例：

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-pt}\big|_{t=0}=1$$

§8. 3　用留数求 Laplace逆变换

8.3.1 解析表达式---复反演积分公式

定理(Laplace反演积分公式):

设$f(t)$满足Laplace变换存在定理条件,

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(p)\left(\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_0,\quad t>0\right),$$ 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\begin{cases} f(t), & t\text{为连续点} \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & t\text{为间断点.} \end{cases}$$

证明：$\forall \sigma > \sigma_0, f(t)e^{-\sigma t}$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积

$\Rightarrow t$为连续点时，由F－积分公式，

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-i\omega\tau}d\tau\right)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{0}^{+\infty} f(\tau)e^{-(\sigma+i\omega)\tau}d\tau\right)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\overset{f\text{的}L-\text{变换}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega.$$

令$\sigma+i\omega = p \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp.$

#

$(\sigma-i\infty,\sigma+i\infty)$为$\operatorname{Re} p > \sigma_0$内任一条平行于虚轴的直线.

8.3.2 用反演公式计算Laplace逆变换

Jordan引理：

设$F(p)$满足

(1)$F(p)$在左半平面$\mathrm{Re}\, p < \sigma$内只有有限个奇点；

(2) $\mathrm{Re}\, p < \sigma, |p| \to +\infty$时，$F(p) \to 0$

则$t > 0$时成立 $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0$

$\left(C_R : |p - \sigma| = R, \mathrm{Re}\, p < \sigma \right)$

定理(Heaviside公式)：

若$F(p)$在p平面只有有限个奇点　$p_1,\cdots,p_n$

且均在$\operatorname{Re} p>\sigma$左侧，且$\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$，则$t>0$时

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}dp=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p_k\right]=\begin{cases}f(t), & t\text{为连续点},\\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & t\text{为间断点}.\end{cases}$$

由Jordan引理,它趋于0

证明：根据留数定理

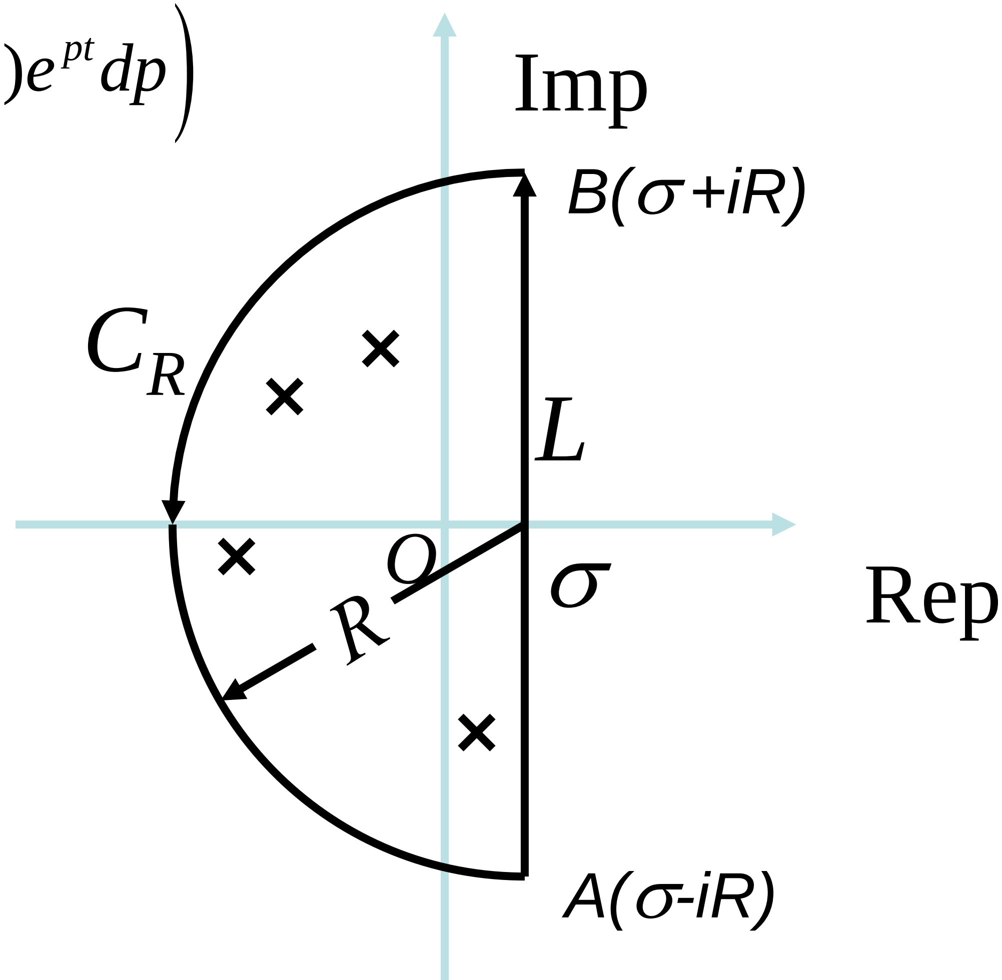
$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\overline{AB}} F(p)e^{pt}dp+\int_{C_R} F(p)e^{pt}dp\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p_k\right]$$

令$R\to+\infty$：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(p)e^{pt},p_k\right]$$



例：$F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p^2+1)^2}e^{-pa}\quad (a>0)$, 求$\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

解：

$p=\pm\mathrm{i}$ 均为$F(p)$的二阶极点.

$$\mathrm{L}^{-1}[F(p)]\overset{\text{延迟}}{=}u(t-a)\left\{\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}\right]\right\}_{(t-a)}$$

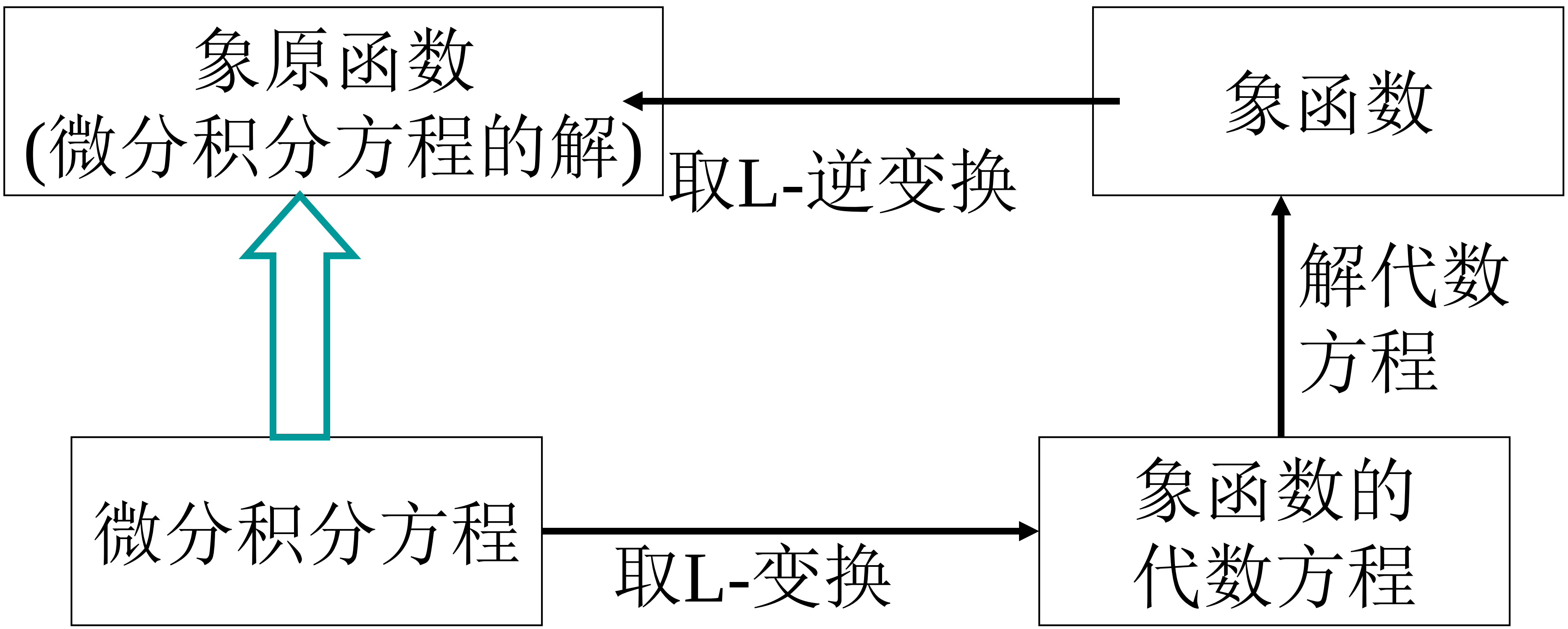
$$=u(t-a)\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}e^{pt},i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{p^2+2}{(p^2+1)^2}e^{pt},-i\right]\right\}_{t-a}$$

$$=u(t-a)\left\{\left[\frac{p^2+2}{(p+i)^2}e^{pt}\right]'_{p=i}+\left[\frac{p^2+2}{(p-i)^2}e^{pt}\right]'_{p=-i}\right\}_{t-a}=u(t-a)\left\{-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{3}{2}\sin t\right\}_{t-a}$$

$$=u(t-a)\left(-\frac{1}{2}(t-a)\cos(t-a)+\frac{3}{2}\sin(t-a)\right).$$

§ 8.4微分积分方程L -变换解法

假设涉及函数的Laplace变换均存在.



8.4.1 常微分方程(组)的求解

1. 初值问题

例: 求解 $\begin{cases} y''(t)+2y'(t)-3y(t)=e^{-t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$

解: 设L [y(t)]=Y(p). 对方程的两边取L-变换,
由像原二阶微分性，并考虑到初始条件， 则得

$$[p^2Y(p)-py(0)-y'(0)]+[2pY(p)-2y(0)]$$

$$-3Y(p)=\frac{1}{p+1},$$

即 $p^2Y(p)-1+2pY(p)-3Y(p)=\dfrac{1}{p+1}.$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}.$$

得Y(p)有三个一阶极点为 -1, 1, -3.用Heaviside公式反解出

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[Y(p)\right]=\mathrm{Res}\left[Y(p)e^{pt},-1\right]$$

$$+\mathrm{Res}\left[Y(p)e^{pt},1\right]+\mathrm{Res}\left[Y(p)e^{pt},-3\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3}{8}\mathrm{e}^{t}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t}.$$

2. 边值问题

例: $\begin{cases} x''(t)+\lambda x(t)=0, \quad 0<t<2\pi, \lambda\in\mathbb{R} \\ x(0)=0, \ x(2\pi)=1 \end{cases}$

解: 令$X(p)=\mathcal{L}[x(t)]$,方程两边取Laplace变换,

像原微分

$$\Rightarrow \quad p^2X(p)-px(0)-x'(0)+\lambda X(p)=0,$$

$$\Rightarrow X(p)=\frac{x'(0)}{p^2+\lambda}$$

$$\Rightarrow x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{x'(0)}{p^2+\lambda}\right]=x'(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\lambda}\right]=\begin{cases} \frac{x'(0)}{\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t), & \lambda<0 \\ x'(0)t, & \lambda=0 \\ \frac{x'(0)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}t), & \lambda>0 \end{cases}$$

$\lambda<0$, 令$t=2\pi \Rightarrow x'(0)=\dfrac{\sqrt{-\lambda}}{\sinh(\sqrt{-\lambda}\,2\pi)} \Rightarrow x(t)=\dfrac{\sinh(\sqrt{-\lambda}t)}{\sinh(\sqrt{-\lambda}\,2\pi)}$

3. 方程组

例：
$$\begin{cases} y''(t) - x''(t) + x'(t) - y(t) = \mathrm{e}^t - 2, \\ 2y''(t) - x''(t) - 2y'(t) + x(t) = -t, \\ y(0) = y'(0) = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

解：令 $X(p) = \mathcal{L}[x(t)], Y(p) = \mathcal{L}[y(t)],$

对2个方程取L-变换

$$\begin{cases} p^2Y(p) - p^2X(p) + pX(p) - Y(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{2}{p} \\ 2p^2Y(p) - \mathrm{p}^2X(p) - 2pY(p) + X(p) = -\dfrac{1}{p^2}, \end{cases}$$

解此线性方程组

$$\text{整理} \Rightarrow \begin{cases} (p+1)Y(p) - pX(p) = \dfrac{-p+2}{p(p-1)^2} \\ 2pY(p) - (p+1)X(p) = -\dfrac{1}{p^2(p-1)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{2p-1}{p^2(p-1)^2} = \dfrac{-1}{p^2} + \dfrac{1}{(p-1)^2}, \\ Y(p) = \dfrac{1}{p(p-1)^2} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\mathrm{p}-1}{(p-1)^2} + \dfrac{1}{(p-1)^2}, \end{cases}$$

取L－逆变换，得

$$\begin{cases} x(t) = -t + t\,\mathrm{e}^t \\ y(t) = 1 - \mathrm{e}^t + t\,\mathrm{e}^t \end{cases}$$

8.4.2 微分积分方程的求解

例：
$$\begin{cases} y'(t)-2\int_0^t u(\tau)y(t-\tau)d\tau+3\int_0^t y(\tau)d\tau=u(t-1) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

解： 令$Y(p)=\mathrm{L}[y(t)]$,

$$\underset{\text{延迟}}{\overset{\text{像原积分}}{\Longrightarrow}} pY(p)-2\mathcal{L}[u(t)*y(t)]+3\frac{Y(p)}{p}=\frac{e^{-p}}{p}$$

$$pY(p)-2\frac{1}{p}\cdot Y(p)+3\frac{Y(p)}{p}=\frac{e^{-p}}{p}\Rightarrow Y(p)=\frac{e^{-p}}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{e^{-p}}{p^2+1}\right]\overset{\text{延迟}}{=}u(t-1)\sin(t-1)$$

例: 求微分积分方程

$$ax'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)\,\mathrm{d}t=h(t)$$

的解, 其中$-\infty<t<+\infty$, a,b,c均为常数.

根据F-变换的微分性质和积分性质, 且记

F[$x(t)$]=$X(\omega)$,   F[$h(t)$]=$H(\omega)$.

在方程两边取F-变换, 可得

$$ai\omega X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega)=H(\omega)$$

代数方程

$$X(\omega)=\frac{H(\omega)}{b+i\left(a\omega-\dfrac{c}{\omega}\right)}$$

It’s The End！

Thank You！

积变作业 习题八

A: 1；2,(2)(5)；3, (3);
4,偶数项; 5,(2)(5);
6,(2)讨论a=b?; 7,(1)(6); 8,(2)(3); 9,(6);
10,(3)(4); 11,(5);12,(1)

B: 2;4;5;6