第十章 分离变量法

上海交通大学数学科学学院
唐异垒

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

分离变量法

许多物理现象都具有叠加性：由几种不同原因同时出现时所产生的效果，等于各个原因单独出现时所产生的效果的叠加，这就是物理学中的**叠加原理。**

在解决数学中的线性问题时，可应用物理学中的**叠加原理。**

分离变量法又称Fourier方法，而在波动方程情形也称为驻波法。它是解决数学物理方程定解问题中的一中基本方法，这个方法建立在叠加原理的基础上，其基本出发点是物理学中的**机械振动和电磁振动**（总可分解为一些简谐振动的叠加）

- 一维波动方程
  - 齐次方程
  - 非齐次方程
- 一维热传导方程
  - 齐次方程
  - 非齐次方程
- 二维Laplace方程
  - 齐次方程
  - 非齐次方程

§ 10.1 一维波动方程

1.两端固定的有界弦的自由振动(第一类齐次边界)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L & (1) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & (2) \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) & (3) \end{cases}$$

其中$\phi(x)$, $\psi(x)$为$[0,L]$上分段可导函数。

(I) 首先找到具有<u>**变量分离**</u>形式的满足方程（1）和边界条件（2）的非零特解—得到两个ODE的定解问题。

函数 u(x,t) 具有变量分离形式，即可表示为

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

代入PDE（1）和边界条件（2）得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)\ T(t)$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (5)$$

以及代入边界条件（2）得

$$X(0)T(t)=X(L)T(t)=0 \qquad (6)$$

(5)式中，左端是**t**的函数，右端是x的函数，***t, x***不相关，由此可得只能是常数，记为 $-\lambda$. 从而有

- $$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<L, \\ X(0)=X(L)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

- $$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \quad (\mathrm{t}>0). \qquad (8)$$

定解问题可分离为分别关于*X, T*的*ODE*,且边界条件也同样进行分离

实系数n阶线性ODE求解

$$y^{(n)}+a_1\, y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\, y'+a_n\, y\ =0,\ \ y=y(x).$$

由一阶ODE： $y'+a_1\, y\ =0 \Rightarrow$ 解 $y=ce^{-a_1 x}$.

设解都具有这种指数形式$y=ce^{\gamma x}$，代入ODE，得到

特征方程： $\gamma^n+a_1\,\gamma^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\,\gamma+a_n\ =0$

定理: 设特征方程共有s个互不相同的根$\gamma_1, \gamma_2\ldots, \gamma_s$,
重数分别为 $n_1, n_2\ldots, n_s$, $n_1+n_2+\ldots+n_s=n.$ 则函数组(n个)

$$\begin{cases} e^{\gamma_1 x}, xe^{\gamma_1 x}, x^2e^{\gamma_1 x},\ldots, x^{n_1-1}e^{\gamma_1 x}; \\ e^{\gamma_2 x}, xe^{\gamma_2 x}, x^2e^{\gamma_2 x},\ldots, x^{n_2-1}e^{\gamma_2 x};\ldots \\ e^{\gamma_s x}, xe^{\gamma_s x}, x^2e^{\gamma_s x},\ldots, x^{n_s-1}e^{\gamma_s x}. \end{cases}$$

是n阶线性ODE的一个基本解组(任意解是这些函数的线性组合).

若存在$\gamma_j=\alpha_j+i\beta_j$为复根，则必共轭成对出现

$\bar{\gamma}_j=\alpha_j-i\beta_j$也为复根，它们重数一样，为 n_j.则基本解组中函数

$$e^{\gamma_j x}=e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}=e^{\alpha_j x}(\cos(\beta_j x)+i\sin(\beta_j x)),$$

$$e^{\bar{\gamma}_j x}=e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}=e^{\alpha_j x}(\cos(\beta_j x)-i\sin(\beta_j x)),$$

它们控制的基本解组函数为

$$\begin{cases} e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ xe^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ x^2e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x); \\ e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ xe^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ x^2e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x),\ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x)\ . \end{cases}$$

是n阶线性ODE的一个基本解组(任意解是这些函数的线性组合)

(II) (特征) 固有问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad (0<x<L), \\ X(0)=X(L)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

情形（A） $\lambda<0$ 其通解为 $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$,

由**边界条件**，推出 $\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}L}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}L}=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=0$

$\Rightarrow$ 只有零解 $X(x)\equiv 0$

情形（B） $\lambda=0$ 2次积分其通解为 $X(x)=C_1+C_2x$,

由边界条件，可推出 $C_1=C_2=0 \Rightarrow$ 只有零解。

$$\therefore \quad u(x,t)=X(x)T(t)\equiv 0$$

情形（C） $\lambda > 0$ 方程的通解为

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

由边界条件X(0) = 0推出 $C_1 = 0,$

再由 $X(L) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0,$ 知道为了使 $C_2 \neq 0,$ 必须

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

于是有

$$\sqrt{\lambda}L = k\pi, \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad (k = 1,2,3,\cdots).$$

(特征)固有值

这样就找到了一族非零解

$$X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{L}x, \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

(特征)固有函数

法二：应用L-变换求ODE边值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<L, \\ X(0)=X(L)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

解: 令$F(p)=\mathrm{L}\left[X(x)\right]$,方程两边取Laplace变换，

像原微分

$$\Rightarrow \quad p^2F(p)-pX(0)-X'(0)+\lambda F(p)=0,$$

用到(原像)高阶微分性 $\mathrm{L}\left[f(t)\right]=F(p)$:

$$\mathrm{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$\Rightarrow X(p)=\frac{X'(0)}{p^2+\lambda}$$

$$\Rightarrow X(x)=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{X'(0)}{p^2+\lambda}\right]=X'(0)\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+\lambda}\right]=\begin{cases}\dfrac{X'(0)}{\sqrt{-\lambda}}\sinh(\sqrt{-\lambda}t), & \lambda<0\\ X'(0)t, & \lambda=0\\ \dfrac{X'(0)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}t), & \lambda>0\end{cases}$$

$$\lambda<0,\ 令x=L\Rightarrow\frac{X'(0)}{\sqrt{-\lambda}}\bullet\frac{e^{\sqrt{-\lambda}L}-e^{-\sqrt{-\lambda}L}}{2}\equiv 0\Rightarrow X'(0)=0\Rightarrow X(x)=0;$$

$$\lambda=0,\ 令x=L\Rightarrow X'(0)t\equiv 0\Rightarrow X'(0)=0\Rightarrow X(x)=0;$$

$$\lambda>0,\ 令x=L\Rightarrow\frac{X'(0)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}L)\equiv 0\Rightarrow X'(0)=0$$

(特征)固有值

$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}L=k\pi\Rightarrow\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{L^2},\quad (k=1,2,3,\cdots)$$

再看关于T的方程(8)

$$\lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2}, \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

代入ODE(8)可得

$$T'' + a^2 \frac{k^2\pi^2}{L^2} T = 0,$$

其通解为

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a}{L} t + B_k \sin\frac{k\pi a}{L} t,$$

由此，就得到方程（1）满足边界条件（2）的变量分离的非零特解（**分离变量的形式解**）

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$$

$$= \sin\frac{k\pi}{L} x \left(A_k \cos\frac{k\pi a}{L} t + B_k \sin\frac{k\pi a}{L} t \right) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

C_k合到A、B中去了

Note

1. 这样的解有无穷多个。
2. 单独一个特解不可能恰好满足初始条件(条件太多影响解的存在性，太少影响唯一性)

$$u_k(x,t)\Big|_{t=0} = X_k(x)T_k(0) = (\sin\frac{k\pi}{L}x)A_k = \phi(x)$$

$$\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = X_k(x)T_k'(t) = (\sin\frac{k\pi}{L}x)\left(B_k\frac{k\pi a}{L}\right) = \psi(x)$$

3.一个给定函数可以表示为一个三角函数概率太小，但是一个性质好的函数(分段可导或满足D-条件)可表示为三角级数（Fourier级数）的形式。

4. PDE及边界条件都是齐次的，叠加起来还是齐次的。

Fourier展开定理：

满足Dirichlet 条件的周期函数 $f(t),\quad t\in[-L,L]$

可表示为三角级数（**Fourier级数**）的形式如下:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),\quad \omega=2\pi/(2L)$$

展开式系数

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t\ \ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t\ \ (n=1,2,\cdots).$$

收敛结果：当t是连续点时，级数收敛于该点的函数值；
当t是间断点时，级数收敛于该点左右极限的平均值。

(III) 特解的叠加

为了求出原定解问题的解，还需满足初始条件 (3).一般来讲，前面求出的特解不一定满足初始条件。

为此把所有特解 $u_k(x,t)$ 叠加起来，并使之满足初始条件，即

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{L}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{L}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x \qquad (9)$$

使得

$$\begin{cases}\phi(x)=u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{L}x, & (10)\\ \psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{L}\sin\frac{k\pi}{L}x. & (11)\end{cases}$$

方程左边是Fourier正弦级数,这就提示需要把右边的展开为F-正弦级数，然后比较F-系数

因此,$A_k,\dfrac{k\pi a}{L}B_k$ 应分别是 $\phi(x),\psi(x)$ 在[0, L] 上

正弦展开的Fourier-系数（或利用固有函数的正交性），即

$$A_k=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(\xi)\sin\frac{k\pi}{L}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^L\psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{L}\xi\,\mathrm{d}\xi$$

这样，我们就给出了混合问题（1）--（3）的形式解（9），其中系数由上式给出。

sina.sinb=[cos(a-b)-cos(a+b)]/2

$$\sin\frac{\pi}{L}x, \sin\frac{2\pi}{L}x, \cdots, \sin\frac{k\pi}{L}x, \cdots$$

是[0, L]上的正交函数列

$$\int_0^L \sin(\frac{m\pi}{L}x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m=n, \\ 0, & m\neq n, \end{cases} \quad m,n\in N.$$

$$1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \cdots, \cos\frac{k\pi}{L}x, \cdots$$

对(10),(11)两边[0, L]积分，再由正交性，也可得系数公式

是[0, L]上的正交函数列

$$\int_0^L \cos\frac{m\pi}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}xdx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m=n, \\ 0, & m\neq n, \end{cases} \quad m,n\in N.$$

积化和差 cosa.cosb=[cos(a-b)+cos(a+b)]/2

分离变量法的解题步骤

第一步 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 适合PDE方程和边界条件，从而定出 $X(x)$ 所适合的常微分方程齐次边值问题，以及 $T(t)$ 适合的常微分方程。

固有值问题

第二步 求解固有值问题，求出全部固有值和固有函数，并求出相应的 $T(t)$，从而得到特解。

第三步 将所有变量分离形式的特解叠加起来，并利用初始条件定出所有待定系数。

偏微分方程 $\xrightarrow{\text{分离变量}}$

$$\rightarrow\begin{cases}\text{常微分方程（关于X）+边界条件}\rightarrow\text{特征(值)函数}\\ \text{常微分方程（关于T）+初始条件}\rightarrow\text{叠加系数}\end{cases}$$

$$\text{通解}=\sum_{\text{特征值}}\text{固有函数}\cdot T$$

例:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \boxed{x(L-x)},\ u_t(x,0) = \boxed{\sin\frac{2\pi}{L}x}. \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi(x), \psi(x)}$$

解: 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$

是齐次方程和齐次边界条件的非零解, 则有

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\ (0 < x < L) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \longrightarrow \lambda = \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2},$$

$$X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{L}x$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0,\ (t > 0) \longrightarrow T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a}{L}t + B_k \sin\frac{k\pi a}{L}t$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{L}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{L}t\right)\sin\frac{k\pi}{L}x$$

其中

$$A_k=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\int_0^L x(L-x)\mathrm{d}\cos\frac{k\pi}{L}x$$

$$=\frac{2}{k\pi}\int_0^L (L-2x)\cos\frac{k\pi}{L}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4L^2}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^L\sin\frac{2\pi}{L}x\sin\frac{k\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{L}{2\pi a}, & k=2,\\ 0, & k\neq 2.\end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)$$

$$=\frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cos\frac{k\pi a}{L}t\ \sin\frac{k\pi}{L}x$$

$$+\frac{L}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{L}t\ \sin\frac{2\pi}{L}x.$$

2. II类齐次边界条件

磁致伸缩换能器、鱼群探测换能器等器件的核心是两端自由的均匀杆，它作纵振动。研究两端自由的自由棒的纵振动,即定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0, \ 0<x<L, \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0, \\ u(x,0)=\phi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x). \end{cases}$$

解: 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 并代入方程得

$$\begin{cases} XT''-a^2X''T=0 \\ \left.\begin{array}{l} X'(0)T(t)=0 \\ X'(L)T(t)=0 \end{array}\right\} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(L)=0 \end{cases}$$

现用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

固有 (特征)问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0, \quad X'(L)=0 \end{cases}$$

设$\lambda>0$（与I类边界条件类似，$\lambda<0$时只有零解）

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

现由边界值确定系数

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(-C_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0+C_2\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0)=0\Rightarrow C_2=0,(\sqrt{\lambda}\neq 0). \\ \sqrt{\lambda}(-C_1\sin\sqrt{\lambda}L+C_2\cos\sqrt{\lambda}L)=0 \end{cases}$$

$C_1 \sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0$，否则方程只有零解，

$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\ L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ L = n\pi \Rightarrow \lambda_n = {(n\pi)^2}/{L^2}$.特征值

$\Rightarrow X_n(x) \ = C_n \cos\dfrac{n\pi}{L}x$. 特征函数

λ=0时，显然对上述特征值、特征函数都满足。

$\Rightarrow X_0(x) \ = C_0$

将特征值代入 $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \ \Rightarrow$

$T'' = 0;\ T'' + a^2\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}T = 0$

$$\text{解得}\begin{cases} T_0(t) = A_0 + B_0 t, \quad n = 0 \\ T_n(t) = A_n \cos\dfrac{n\pi a t}{L} + B_n \sin\dfrac{n\pi a t}{L} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

其中A_0 B_0 A_n B_n均为独立的任意常数。一般解为

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi t}{L}+B_n\sin\frac{an\pi t}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

$$\text{由初始条件}\Rightarrow\begin{cases}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{L}=\phi(x),\\ B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{an\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}=\psi(x),\ 0<x<L.\end{cases}$$

把右边的函数展成Fourier余弦级或利用固有函数正交性,比较两边的系数

$$A_0=\frac{1}{L}\int_0^L\phi(\zeta)d\zeta \qquad B_0=\frac{1}{L}\int_0^L\psi(\zeta)d\zeta$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(\zeta)\cos\frac{n\pi}{L}\zeta d\zeta \qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L\psi(\zeta)\cos\frac{n\pi}{L}\zeta d\zeta$$

3. III类齐次边界条件

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ \underline{u_x(0}, t) = u\underline{(L, t}) = 0, \\ u \ (x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

解: 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 并代入方程得

$$\begin{cases} XT'' - a^2 X''T = 0 \\ \left. \begin{array}{l} X'(0)T(t) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

现用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

特征值(固有)问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0, \quad X(L)=0 \end{cases}$$

设$\lambda>0$（与I类边界条件类似，$\lambda\leq 0$时只有零解）

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

现由边界值确定系数

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(-C_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0+C_2\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0)=0\Rightarrow C_2=0,(\sqrt{\lambda}\neq 0). \\ C_1\cos\sqrt{\lambda}L+C_2\sin\sqrt{\lambda}L=0 \end{cases}$$

$C_1 \cos\sqrt{\lambda L} = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0$，否则方程只有零解，

$$\Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}\ L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\ L = \frac{(2n-1)\pi}{2} \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2.$$ 固有值

$$\Rightarrow X_n(x) \quad = C_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2L}x,\ n = 1, 2\ldots$$ 固有函数

将特征值代入 $T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \quad \Rightarrow$

$$T'' + a^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 T = 0$$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L} + B_n \sin\frac{(2n-1)\pi at}{2L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中A_n B_n均为独立的任意常数。一般解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L}+B_n\sin\frac{(2n-1)\pi at}{2L}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

$$\text{由初始条件}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}=\phi(x),\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{(2n-1)\pi a}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}=\psi(x),\ 0<x<L.\end{cases}$$

把右边的函数展成Fourier余弦级数, 比较两边的系数

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(\zeta)\cos\frac{(2n-1)\pi\zeta}{2L}d\zeta$$

$$B_n=\frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^L\psi(\zeta)\cos\frac{(2n-1)\pi\zeta}{2L}d\zeta$$

边界条件、固有值与固有函数关系表

边界条件	固有值	固有函数
$X(0)=X(L)=0$	$\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{L^2},\quad k=1,2\cdots$	$X_k(x)=\sin\dfrac{k\pi}{L}x$
$X(0)=X'(L)=0$	$\lambda_k=\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2,\quad k=1,2\cdots$	$X_k(x)=\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2L}x$
$X(0)'=X(L)=0$	$\lambda_k=\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2,\quad k=1,2\cdots$	$X_k(x)=\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2L}x$
$X(0)'=X'(L)=0$	$\lambda_k=\dfrac{k^2\pi^2}{L^2},\quad k=0,1\cdots$	$X_k(x)=\cos\dfrac{k\pi}{L}x$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

例:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos\dfrac{3\pi}{2L}x, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

解: 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 并代入方程得

$\Rightarrow$ 固有值: $\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2.$

$\Rightarrow$ 固有函数 $X_n(x) = C_n \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2L}x, n = 1, 2...$

$$\Rightarrow T_n(t) = A_n \cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L} + B_n \sin\frac{(2n-1)\pi at}{2L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

解：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L}+B_n\sin\frac{(2n-1)\pi at}{2L})\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$

由初始条件$\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}=\cos\frac{3\pi}{2L}x,\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{(2n-1)\pi a}{2L}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}=0,\ 0<x<L.\end{cases}$

把右边的函数展成Fourier余弦级数, 或直接比较两边的系数

$$A_2=1,\ A_n=0,\ (n\neq 2),\quad B_n=0.$$

$$\Rightarrow\ u(x,t)=\cos\frac{3\pi at}{2L}\cos\frac{3\pi x}{2L}.$$

It’s The End！

Thank You！

作业：习题10

1(1)(2)(4); 3; 4; 待续…

B.1