第三章 复变函数的积分

纲要:

1、复积分的概念及性质

2、柯西积分定理

3、柯西积分公式

§ 3.1 复积分的概念及性质

3.1.1 基本概念

设L为逐段光滑简单曲线（A→B），$f(z)$=u+iv在L上有定义，把L用分点按序分成n个更小的弧

$$A = z_0, z_1, z_2 \ldots, z_{n-1}, z_n = B$$

如果ζ_k是 z_{k-1}到 z_k 的弧上任一点，考虑和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \text{其中} \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

令$\lambda = \max\{|z_0z_1|, |z_1z_2|, \cdots, |z_{n-1}z_n|\}$,

则当n无限增大，且 $\lambda \to 0$ 时，如果无论对L的分法及 ζ_k 的取法如何，都有下面惟一极限存在，那么称这个极限值为函数沿曲线L的积分，记即

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (3.1)$$

称为复变函数的积分，简称复积分.

当L为闭曲线时，（3.1）称为（闭合）环路积分.

3.1.2 复积分的计算

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是在L上连续，将（3.1）右边和式分成实部与虚部，设

$$z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

$$+ i[\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k],$$

根据曲线积分存在的充分条件，

当曲线L上的分点个数无穷增加，且小弧段长度的最大值趋于0 时上面的四个式子分别有极限：

$$\int_L u(x,y)\mathrm{d}x, \int_L v(x,y)\mathrm{d}y, \int_L v(x,y)\mathrm{d}x, \int_L u(x,y)\mathrm{d}y,$$

这时，我们说原和式有极限

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \int_L [u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int_L [v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y]$$

定理（可积的充分条件）：设 $f(z)$ 是曲线 L 上的连续函数，则积分 $\int_L f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在。

积分变量代换法计算积分

设L是(分段)光滑简单曲线：$x=\varphi(t), y=\phi(t)(t_0\le t\le T)$,

且 t_0及T相应于z_0及z_n，则上式右边的积分可变形.

例如

$$\int_L u(x,y)\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{T} u(\varphi(t),\phi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

因此,

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_0}^{T}[u(\varphi,\phi)+iv(\varphi,\phi)][\varphi'(t)+i\phi'(t)]\mathrm{d}t.$$

把dz形式地换成微分，就直接得到上式，因此

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

3.1.3 复积分的性质

设$f(z)$及$g(z)$在简单曲线L上连续，则有

（1）$\int_L \alpha f(z)\mathrm{d}z = \alpha\int_L f(z)\mathrm{d}z$，其中$\alpha$是一个复常数.

（2）$\int_L [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_L f(z)\mathrm{d}z \pm \int_L g(z)\mathrm{d}z.$

（3）$\int_L f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z + \ldots + \int_{L_n} f(z)\mathrm{d}z$

其中曲线L是由光滑的曲线 $L_1, L_2, \ldots, L_n$ 连接而成.

(4) $$\int_{L^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{L} f(z)\mathrm{d}z$$

L^-为 L 的负向曲线.

(5)积分的模不大于被积函数模的积分，即

$$\left|\int_{L} f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_{L} |f(z)||\mathrm{d}z| \le \int_{L} |f(z)|\mathrm{d}S$$

这里ds表示弧长的微元。

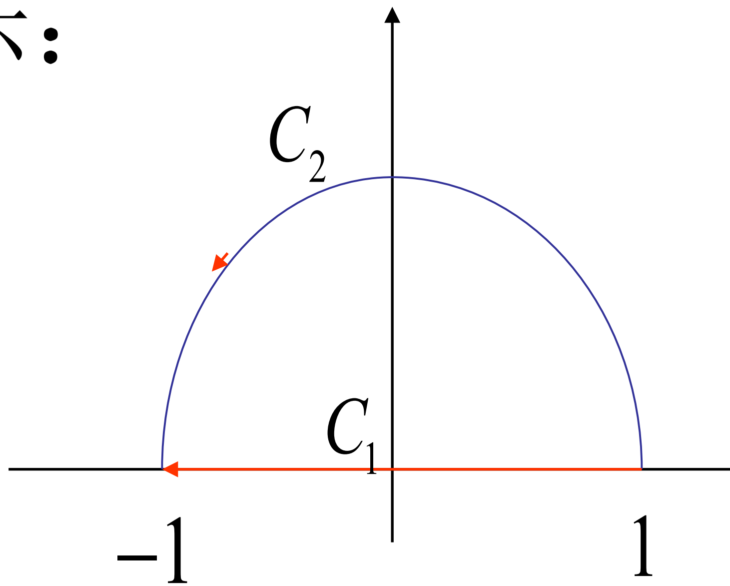
(6)积分估值定理：　若沿曲线 L，$f(z)$ 连续且 $f(z)$ 在 L上满足 $|f(z)|\le M$，　则

$$\left|\int_L f(z)\mathrm{d}z\right| \le Ml$$

其中　l 为曲线 L 的长度.

3.1.4 积分计算实例

例1：计算 $\int_C z^2 dz$，C_i 如图所示：



解：$C_1 : z = x, y = 0, x : 1 \to -1 \Rightarrow$

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_1^{-1} x^2 dx = -\frac{2}{3};$$

$C_2 : z = e^{i\theta}, \ \theta : 0 \to \pi \Rightarrow$

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_0^{\pi} e^{2\theta i} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{3\theta i} d\theta = \frac{1}{3} e^{3\theta i} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3}.$$

（重要）例2：

计算积分$\mathrm{I}=\oint_C \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}\ (n\in \mathrm{Z}),\quad C:\left|z-z_0\right|=r>0$

解：

$$C: z=z_0+re^{i\theta}\quad (0\le\theta\le 2\pi),\ dz=ire^{i\theta}d\theta$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{(re^{i\theta})^n}$$

$$=\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} ie^{-i(n-1)\theta}d\theta \quad =\begin{cases}0, & n\neq 1,\\ 2\pi i, & n=1.\end{cases}$$

§ 3.2 柯西积分定理

3.2.1. Cauchy积分定理及推广

什么条件下，积分 $\int_L f(z) \quad dz$

与路径无关？

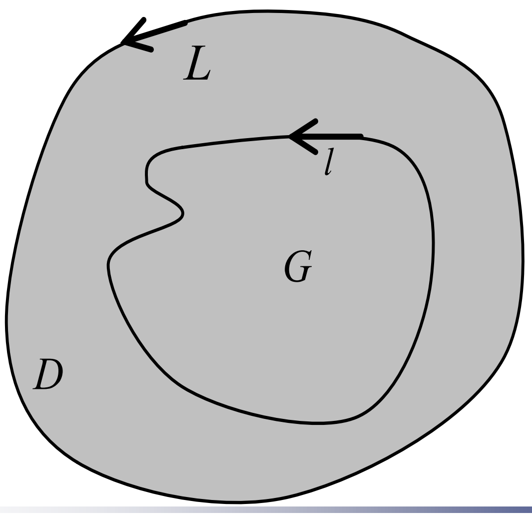
定理3.2 (Cauchy积分定理) 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内及其边界线 L 上解析（即为在单连通闭区域 $\overline{D}$ 解析），那么函数 $f(z)$ 沿边界 L 或区域 D 内任意闭曲线 的积分为零，

即

$$\oint_L f(z)\,dz = 0$$

或

$$\oint_l f(z)\,dz = 0$$



Pf：由于 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上解析，故 $f'(z)$ 在 $\overline{D}$ 存在的，且可证明也是连续的．此时，u_x, u_y, v_x, v_y 都在 D 内连续。

$$I=\int_L u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+i\int_L v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y,$$

Green定理 (或格林公式)：在单连通闭区域 $\overline{D}$ 内，若P(x,y), Q(x,y) 有连续的偏导数，则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中L是区域D的边界.

推论1（解析函数积分与路径无关）

如果函数$f(z)$在单连通域D内解析，则积分

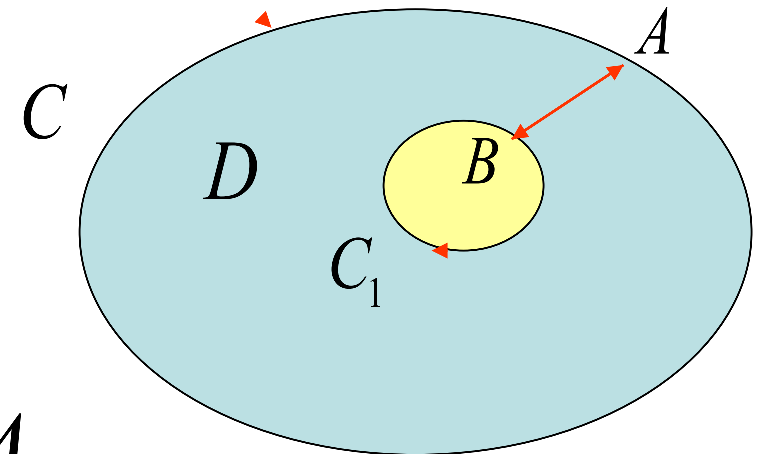
$$\int_l f(z)dz, \quad l \in D,$$

与连接起点及终点的路径无关.

Cauchy积分定理推广到多连通域

推论2（闭路变形原理） 设C，C_1为任意两条简单闭曲线, C_1在C内部,设$f(z)$在C及C_1所围的环域D内解析, 在边界上连续，则

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz.$$



证明：取

$$\Gamma = C^+ + \overrightarrow{AB} + C_1^- + \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma = \int_{C^+} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{C_1^-} + \int_{\overrightarrow{BA}} = \oint_{C^+} + \int_{C_1^-} = 0$$

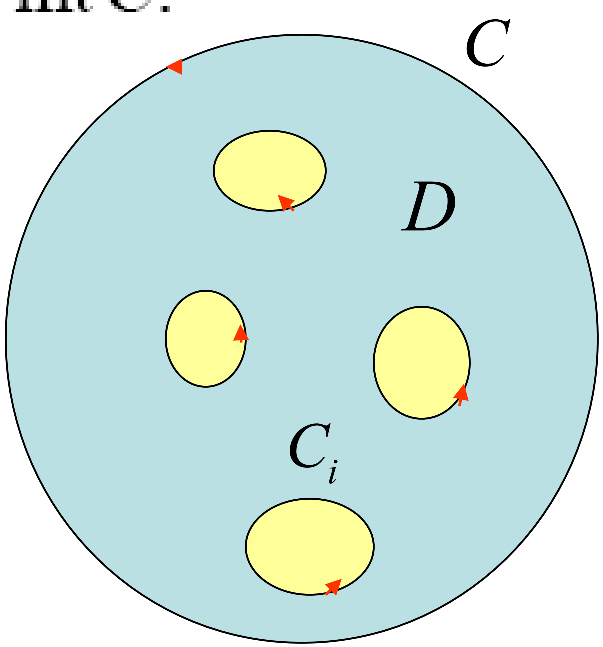
推论3（复合闭路定理）：

设$f(z)$在单连通区域D内除$z_1,z_2,\cdots,z_n$外解析，

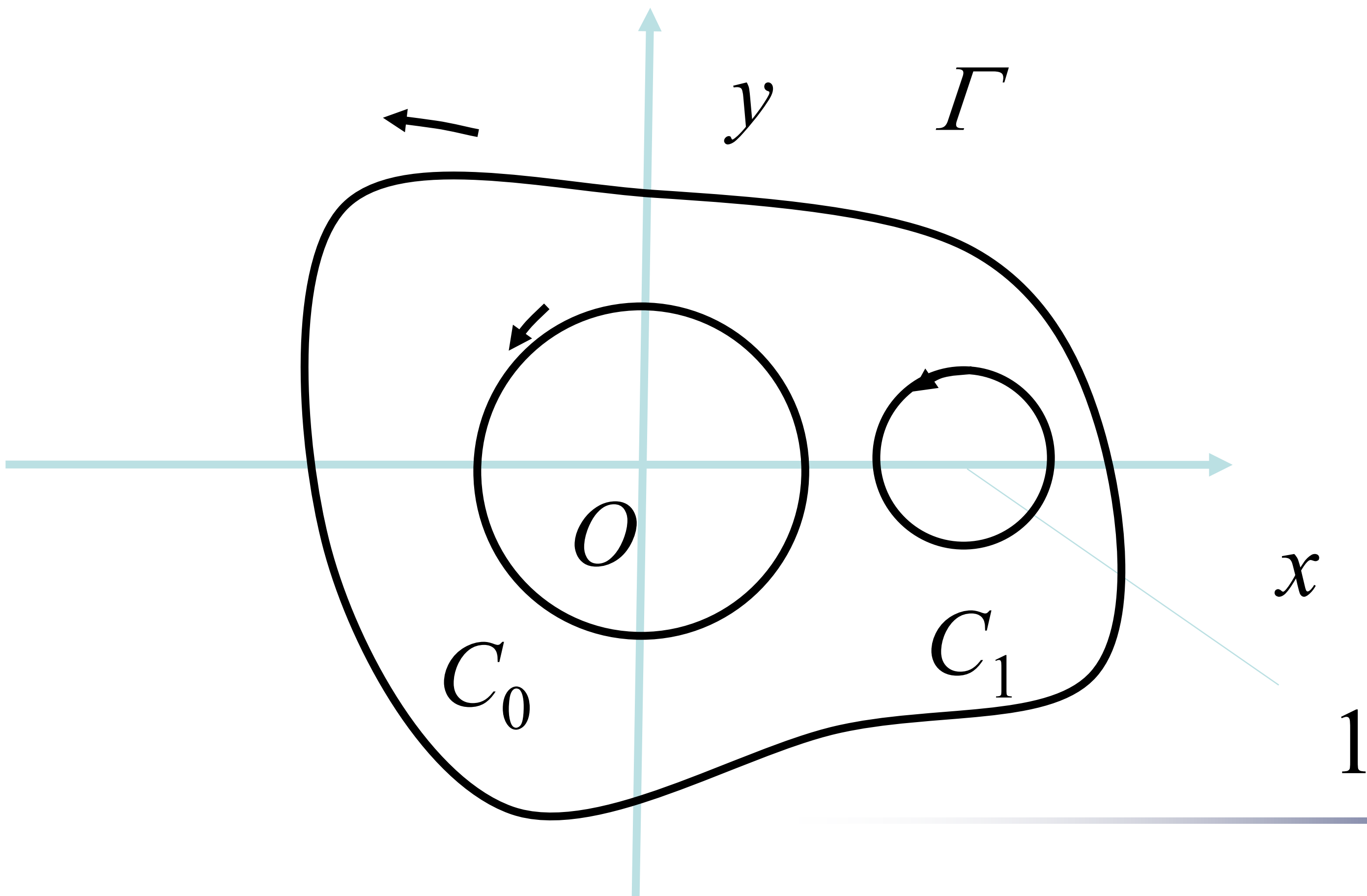
C为D内任一条包含$z_1,z_2,\cdots,z_n$的正向闭曲线，

C_k为仅包含z_k的正向闭曲线，$C_k\subset \operatorname{int} C$.

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz$$



例 计算 $\displaystyle\oint_{\Gamma}\frac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$， Γ为包含圆周$|z|=1$在内的任何正向简单闭曲线.



$$\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_0} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_0} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_0} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$+ \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

$$\underset{\text{例子}}{\overset{Cauchy\text{定理}}{=}} \quad 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0 = 4\pi i$$

3.2.2 复积分的Newton-Lebniz公式

设$f(z)$为单连通域D内的解析函数。积分

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

可以看作是z的单值函数，记为：

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta .$$

定理 3.3：（原函数的解析性）： 如果$f(z)$在单连通区域D内解析, 则函数

$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 也必为D内的一个解析函数，且

$$F'(z)=f(z).$$

证：只需证：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=0$$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

定义：设$f(z)$为区域D内的连续函数，F是D内的函数且满足$F'(z) = f(z)$, 则称F为f的一个原函数。

定理表明 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$是$f(z)$的一个原函数.

推论：$f(z)$的任何两个原函数相差一个常数.

定理 3.4：（复积分Newton-Leibniz公式）

在单连通区域D内, 若函数 $f(z)$ 解析，F(z)为$f(z)$的一个原函数，那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0),$$

其中z_0, z_1为D中任意两点.

证明：因为 $\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 也是$f(z)$的原函数，

所以

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \mathrm{F}(z) + c.$$

当$\mathrm{z} = \mathrm{z}_0$时， 由Cauchy定理， $\mathrm{c} = -\mathrm{F}(\mathrm{z}_0)$.

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z = F(z) - F(z_0),$$

或$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = F(z_1) - F(z_0).$ #

3.3.1 Cauchy积分公式

定理3.5 (柯西积分公式)：如果 $f(z)$ 在区域 D 内解析，连续到边界 C，z_0 为 C 内的任一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z.$$

证：$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

只需证 $$\left| \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon$$

上海交通大學 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

推论（解析函数的平均值定理）　如果C是圆周$z=z_0+Re^{i\theta}$, 则柯西积分公式成为

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

计算积分 $\mathrm{I}=\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)(z-2)}dz \quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2)$

解：

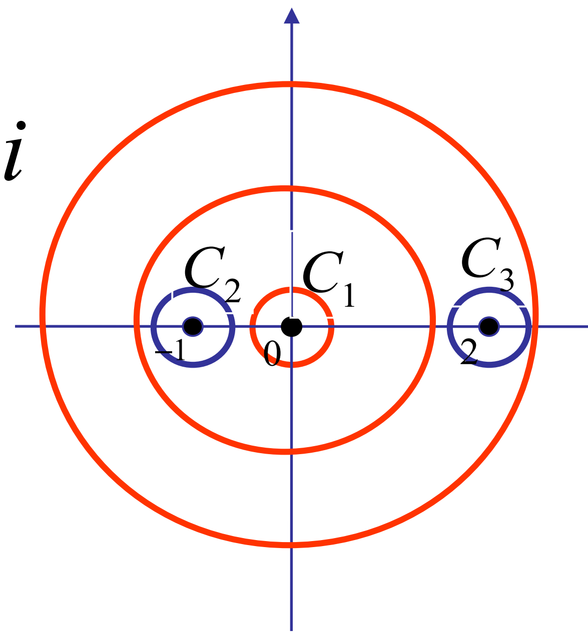
$0<r<1,\ \mathrm{I}=\oint_{C_1}\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)(z-2)}}{z}\mathrm{d}z \overset{Cauchy公式}{=} -\pi i$

$1<r<2,\ \mathrm{I}=\oint_{C_1}+\oint_{C_2} \overset{Cauchy公式}{=} -\pi i+\frac{2\pi}{3e}i$

$r>2,$

$\mathrm{I}=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}+\oint_{C_3}$

$\overset{Cauchy公式}{=} -\pi i+\frac{2\pi}{3e}i+\frac{e^2\pi}{3}i$



3.3.2 解析函数的无限可微性

-----柯西积分公式的几个重要推论

定理3.6 (Cauchy高阶导数公式):

$f(z)$在区域D内解析，且连续到边界C，那么$f(z)$在D内的导数仍为解析函数且有任意阶导数

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

证明：n=1时,只需证明，当h趋近于0时，

下式也趋近于0 .

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right.\quad\left.-\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right]$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta$$

现在估计上式右边的积分。设以z为心，以$2d$为半径的圆盘完全在D内，并且在这个圆盘内取$z+h$，使得$0<|h|<d$，那么

当 $\zeta\in C$ 时， $|\zeta-z|>d, |\zeta-z-h|>d.$

设$|f(z)|$在C上的一个上界是M，并且设C的长度是L，于是我们有

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}d\zeta\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{ML}{d^3},$$

因此当h趋近于0时，要证的积分趋于0。

现在用数学归纳法完成定理的证明。设$n=k$时，结论成立。取z及$z+h$同上，那么有

$$\frac{f^{(k)}(z+h)-f^{(k)}(z)}{h}-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^{k+1}}d\zeta-\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right] \quad -\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i h}\oint_C f(\zeta)\frac{h(k+1)(\zeta-z)^k+h^2O(1)}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta-\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)}-\frac{1}{(\zeta-z)^{k+2}}\right]d\zeta+hO(1)$$

由此证明，当h趋近于0时，上式的右边趋于0，于是定理的结论当$n=k+1$时成立。#

例：求积分，其中C为正向圆周：$|z|=r>1$.

1) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d} z$;

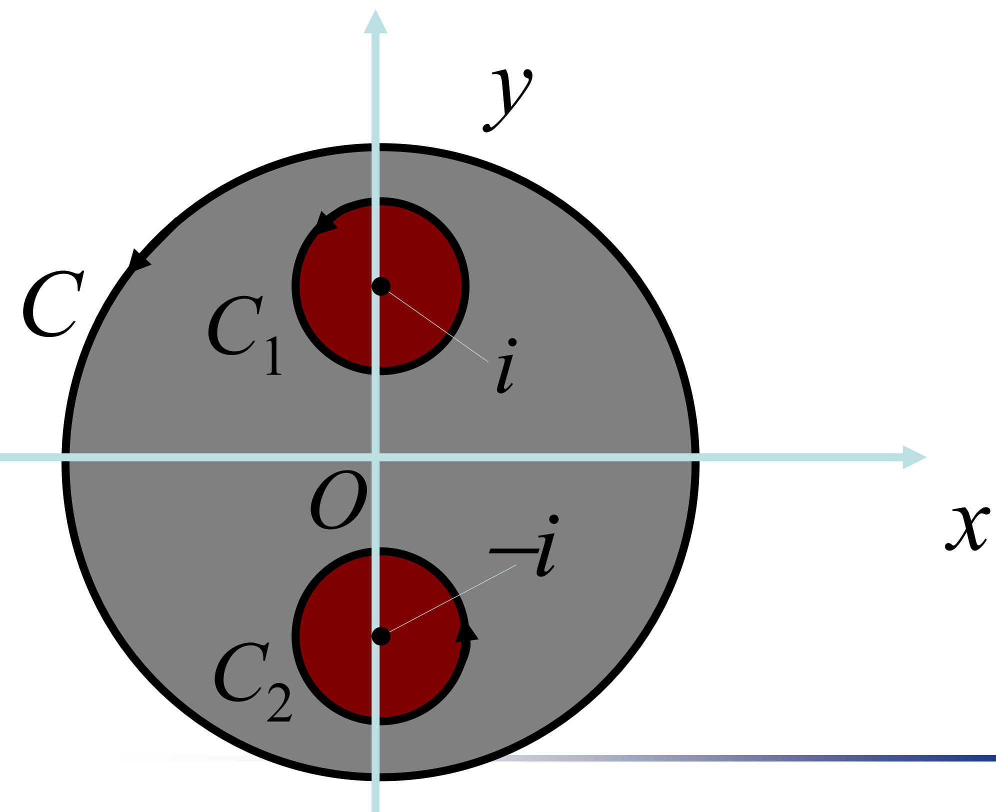
解：函数 $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}$ 在C内的$z=1$处不解析，但$\cos\pi z$

在C内却是处处解析的.

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} \mathrm{d} z \overset{Cauchy\text{高阶导}}{=} \frac{2\pi i}{(5-1)!}(\cos \pi z)^{(4)}\Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

2) $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z, C:|z|=r>1.$

解: 函数$\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$在C内的$z=\pm i$处不解析. 在C内以i和$-i$为中心作两个正向圆周C_1, C_2.则此函数在由C, C_1和C_2所围成的区域内解析.



$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,dz = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{\dfrac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}\,dz$$

$$\overset{Cauchy\text{高阶导}}{=} \frac{2\pi i}{(2-1)!}\left\{\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} + \left[\frac{e^z}{(z-i)^2}\right]'_{z=-i}\right\}$$

$$= i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

推论（Cauchy不等式）

设函数$f(z)$在以$C:|z-z_0|=\rho_0 (0<\rho_0<+\infty)$为边界的圆盘内解析连续到边界，那么

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \le \frac{M}{\rho_0^{\ n}} (n=0,1,2,\ldots;0!=1)$$

其中

$$M=\max_{|z-z_0|=\rho_0} |f(z)|.$$

Pf:

$$|f^{(n)}(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta\right| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho_0^{\ n+1}} \cdot 2\pi\rho_0 = n! \cdot \frac{M}{\rho_0^{\ n}}$$

It’s The End！

Thank You！

习题三

A: 1, (1)(2)； 3,(2); 6,(2)； 7； 8; 9,(5)(8)； 11,(2)； 12,(1)(7)； 14.

B: 1; 9.