上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第四章　级数

1. 复级数与幂级数
2. 解析函数的Taylor展开
3. 解析函数的Laurent展开
4. 孤立奇点

§ 4.1 幂级数

4.1.1 复数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n (\text{或} \sum z_n) = z_1 + z_2 \ldots + z_n + \ldots,$$

其部分和序列为 $\{S_n\}$，其中 $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

z_n 称为通项.

若序列 $\{S_n\}$ 收敛且极限是 s，那么称级数收敛到 s，记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = s$

若序列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum z_n$ 发散.

定义（数列 $\{S_n\}$ 极限）

设s是一个复常数。如果任给$\varepsilon > 0$，可以找到一个正数N，使得当$n>N$时，

$$|S_n - s| < \varepsilon$$

那么我们说S_n收敛或有和 s，或者说S_n是收敛序列，并且收敛于s，记作

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = s.$$

命题： 令

$$a_n = \operatorname{Re} z_n, b_n = \operatorname{Im} z_n, a = \operatorname{Re} s, b = \operatorname{Im} s$$

则有
$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$$

因此，级数$\sum z_n$ 收敛于s 的充要条件是：级数$\sum a_n$ 收敛于a 以及级数$\sum b_n$ 收敛于b。

对于复数项级数 $\sum z_n$，如果级数$\sum |z_n|$ 收敛，我们称级数 $\sum z_n$绝对收敛。

注1： 级数$\sum z_n$ 绝对收敛充要条件是：级数$\sum a_n$以及$\sum b_n$绝对收敛.

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \text{及} \sum_{k=1}^{n}|b_k| \le \sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2} \le \sum_{k=1}^{n}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|b_k|,$$

注2：绝对收敛$\Rightarrow$收敛。

注3：收敛的必要条件： 通项$\to 0$。

例：当 $|\alpha|<1$ 时，几何级数

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n+\ldots$$

绝对收敛；并且有

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha},\ \lim_{n\to+\infty}\alpha^{n+1}=0$$

我们有，当 $|\alpha|<1$ 时，

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n+\ldots=\frac{1}{1-\alpha}.$$

注：实数项级数的收敛准则可以用来判断复数项级数的绝对收敛性：

设 $\sum |z_n|$ 为正项实级数，

Cauchy 判别法（根式）：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}<1.$

D’Alembert 判别法（比值）：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|<1.$

Weierstrass 判别法（比较）：

$$|z_n|\le a_n,\ \sum a_n \text{收敛}.$$

4.1.2 幂级数

定义：称特殊的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2$$

$$+\cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

或 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$

为**幂级数**。

前n项的和称为部分和 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k.$

若对$z_0 \in E$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z_0) = f(z_0)$，则称$z_0$为收敛点，级数在$z_0$处收敛于$f(z_0)$，或者有和函数$f(z_0)$.

设函数$f(z)$在E上有定义，若在E上每一点z，级数都收敛于$f(z)$，那么称它在E上收敛于 $f(z)$，或者有和函数 $f(z)$，记作

$$\sum_{k=0}^{n} c_n (z-a)^k = f(z).$$

级数的所有收敛点组成的集合称为收敛域。

定义（绝对收敛）： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$在$E$上收敛。

Abel定理

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$在$z = z_0 (\neq a)$收敛,

则它在$|z-a| < |z_0 - a|$内必绝对收敛;

如果在$z = z_1$处级数发散,则对满足

$|z-a| > |z_1 - a|$的z,级数也必发散.

证:

(1) 因$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0-a)^n$收敛，由必要条件$\lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n=0$,

则存在$M>0$，使对所有的n有$|c_n(z_0-a)^n|<M$.

如果$|z-a|<|z_0-a|$，则$\dfrac{|z-a|}{|z_0-a|}=q<1$,而

$$|c_n(z-a)^n|=|c_n(z_0-a)^n|\cdot\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n<Mq^n,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty} Mq^n\ (|q|<1)$收敛,根据$Weierstrass$判别法,

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$绝对收敛。

(2) 若$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$发散,且如果$|z-a|>|z_1-a|$,

用反证法,设级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$收敛,则根据前面

(1) 的结论可导出$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$收敛,与所设矛盾.

因此$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$发散. #

定义 (收敛圆，收敛半径)

如果存在$R>0$，使得级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

在$|z-a|<R$内处处收敛，在$|z-a|>R$

内发散,则称$|z-a|=R$为收敛圆，

R为收敛半径.

收敛半径R的求法

设幂级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$

Cauchy 判别法（根式）：

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

D’Alembert 判别法（比值）：

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

例： $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{3}+i)^n z^{2n}$ 收敛半径？

幂级数的运算和性质

（1）四则运算

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，收敛半径为$r_1$，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$，收敛半径为$r_2$.

则在$|z|<R=\min(r_1,r_2)$内：

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,$$

$$f(z)g(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0 b_n)z^n.$$

（2）代换(复合)运算

如果当$|w|<r$时, $f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n$, 又设在$|z|<R$内$g(z)$解析且满足$|g(z)|<r$。则当$|z|<R$时,

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[g(z)]^n.$$

注：这个代换运算, 在把函数展开成幂级数时, 有着广泛的应用.

（3） 幂级数的和函数在收敛圆内解析.

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，它在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析。

（4） 幂级数在收敛圆内可逐项求导,逐项积分.

设 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$，它在收敛圆 $|z-a|<R$ 内解析。

设 $\int_L f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_L(z-a)^n dz$，收敛半径仍为 R。

上海交通大學
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

It’s The End！

Thank You！