第四章　级数

§ 4.2 解析函数的Taylor级数展开

4.2.1 Taylor定理

设函数 $f(z)$ 在圆盘 $U:|z-z_0|<R$ 内解析，那么在 U 内，

$$f(z)=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\ldots+\alpha_n(z-z_0)^n+\ldots,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},(n=0,1,2,\ldots),$$

C: $|z-z_0|=\rho>0$，$\forall\rho<\mathrm{R}$。且展式唯一。

注：此幂级数展式称为 $f(z)$ 在 z_0 的Taylor展式。

证明：由Cauchy积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ \forall z\in U,\ |z-z_0|<|\zeta-z_0|<R,$$

$$\Rightarrow \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=q<1,\quad \zeta\in C.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

上式的级数收敛。把展式代入积分，利用解析函数的高阶导公式,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\right\},$$

$$=\alpha_0+\alpha_1(z-z_0)+\ldots+\alpha_n(z-z_0)^n+\ldots$$

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

由于z是U内任意一点，则在U内展式成立。

证唯一性用反证法，利用解析函数的高阶导唯一，可证展式的系数唯一。**#**

综合幂级数的性质（和函数在收敛圆内解析），可得一个函数解析的另一个刻画：

推论1： 函数$f(z)$在一点z_0解析的充要条件：它在z_0的某邻域内可展为 $z-z_0$的幂级数。

推论2：幂级数的和函数$f(z)$在其收敛圆周 $|z-z_0|=r$ 上至少有一个奇点.

$f(z)$在z_0的Taylor展式（级数）的收敛半径

$=$离z_0最近的奇点与z_0之间的距离.

解析的等价条件

函数$f(z)=\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})+i\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})$在区域D内解析

$\Leftrightarrow$（1）$f(z)$在区域D内可导；

$\Leftrightarrow$（2）u, v在区域D内可微，并满足C－R条件；

$\Leftrightarrow$（3）u, v在区域D内存在连续一阶偏导，并满足C－R条件；

$\Leftrightarrow$（4）在区域D内v是u的共轭调和函数；

$\Leftrightarrow$（5）$f(z)$在区域D内可Taylor展开.

$\Leftrightarrow$（6）$f(z)$在区域D内连续且积分与路径无关，

这里D是单连通的。——Morera定理

4.2.2 函数展为Taylor级数的方法

$$f(z)=\sum \alpha_n (z-z_0)^n$$

直接法：由Taylor定理直接计算 $\alpha_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$

间接法：利用函数的各种特殊性以及幂级数的运算与性质。主要有：

(1) 利用几何级数、已知级数作代换或四则运算；

(2) 逐项求导、逐项积分；

(3) 幂级数相乘.

一些基本展式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z|<1.$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ |z|<1.$$

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\ldots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots |z|<+\infty.$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

例：求 e^z 在z=0的Taylor展式。

解：用直接展开法，由于

$$(e^z)' = e^z$$

所以

$$(e^z)^{(n)}\big|_{z=0} = 1$$

因此

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

因为 e^z 在复平面内处处解析, 上式在复平面内处处成立, 收敛半径为∞.

例： $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+2}$ 在 $z=0$ 解析，

可展成 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$， 求 c_n 及收敛半径。

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+2}=\dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{z-(1+i)}-\dfrac{1}{z-(1-i)}\right]$

$$=\frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1+i}}+\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1-i}}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[-\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+i}\right)^n+\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{(1+i)^{n+1}}+\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right]z^n. \quad |z|<\sqrt{2}$$

例：把函数 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 $z=0$ 处的 Taylor 级数.

解：由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 有一奇点 $z=-1$，在 $|z|<1$ 内处处解析，所以可在 $|z|<1$ 内展开成 z 的幂级数. 因为

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots,|z|<1.$$

将上式两边求导得

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-(\frac{1}{1+z})'=1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots,$$

$$|z|<1.$$

§ 4.3 解析函数的Laurent展开

4.3.1 Laurent 级数

例：函数$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在$z=1$不解析,但在圆环域

$0<|z-1|<1$内都是解析的. 则$f(z)$可展开为级数$\sum c_n(z-1)^n$?

$$分析：f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{-1}{z-1}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right]$$

$$=\frac{-1}{z-1}[1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots]$$

$$=-(z-1)^{-1}+1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}+\cdots.$$

由此可见,$f(z)$可以展开为一个双边幂级数.

定理(Laurent 级数展开定理)

设$f(z)$在圆环域$r<|z-z_0|<R$内解析,

则它在此环域内可展成唯一的双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

其中$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.\ (n=0,\pm1,\cdots)$

C为在圆环域内绕z_0的任何一条正向闭曲线.

定义:此定理中级数称为Laurent级数。

唯一性：若在圆环域内有另一Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,$$

并设C为圆环域内任一正向简单闭曲线.

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n-m-1}.$$ 逐项积分，得

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_C(\zeta-z_0)^{n-m-1}\mathrm{d}\zeta=2\pi i a_m(n=m)$$

从而 $$a_m=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta=c_m.(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$ #

4.3.2 解析函数展开为Laurent 级数的方法

可根据代数运算, 代换, 逐项求导和逐项积分, 级数相乘等方法去展开, 以求得Laurent级数的展开式.

注:将函数Laurent展开成$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$的几种提法:

(1) 在圆环域$r<|z-a|<R$ 内的Laurent 级数;

(2) 在点a附近的Laurent级数：在a的去心邻域内的Laurent级数;

(3) 在以a为心的各种圆环域内的Laurent级数.

例：求$\dfrac{1}{(z^2-1)(z-3)}$在$1<|z|<3$内的Laurent展式。

解：$$\frac{1}{(z^2-1)(z-3)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{z}{z^2-1}-\frac{3}{z^2-1}\right)$$

$$\frac{1}{z-3}=\frac{-1}{3(1-\frac{z}{3})}=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^n};$$

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z^2})}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{2n}};$$

$$\Rightarrow\frac{1}{(z^2-1)(z-3)}=\frac{1}{8}\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{2n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{z^{2n+2}}\right).$$

例：将函数$f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$在$0<|z|<+\infty$内展开成*Laurent*级数.

解： 因有

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$z^3 e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right)$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots.$$

注:Laurent级数的系数公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta. \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$n = -1$时，有 $C_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$

$$\boxed{\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i C_{-1}}$$

（即可利用Laurent系数计算积分）

其中C为圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内的任何一条简单闭曲线，$f(z)$ 在此圆环域内解析.

§4.4 孤立奇点

4.4.1 孤立奇点的定义

函数不解析的点为奇点. 如果函数$f(z)$虽在z_0不解析, 但在z_0的某一个去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内处处解析, 则z_0称为$f(z)$的孤立奇点.

例如函数 $\dfrac{1}{z}$ 和 $e^{\frac{1}{z}}$ 都以$z=0$为孤立奇点.

而z=0是函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的非孤立奇点。

4.4.2 孤立奇点的分类及其判断定理

将函数$f(z)$在它的孤立奇点z_0的去心邻域

$0<|z-z_0|<\rho$内展开成Laurent级数.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

根据 Laurent 级数的负幂项数，
将解析函数的孤立奇点分成三类：

（1）可去奇点—无负幂项； $\Leftrightarrow$ (1) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$;

（2）极点—有限负幂项； $\Leftrightarrow$ (2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

（3）本性奇点—无限负幂项. $\Leftrightarrow$ (3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在，

（$\neq$确定复数，$\neq\infty$）.

1. 可去奇点

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots c_n(z-z_0)^n+\ldots,$$

例： $z=1$是$\dfrac{\sin(z-1)}{z-1}$的可去奇点。

因为这个函数在$z=1$的去心邻域内的Laurent级数

$$\frac{\sin(z-1)}{z-1}=\frac{1}{z-1}\left[(z-1)-\frac{1}{3!}(z-1)^3+\frac{1}{5!}(z-1)^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}(z-1)^2+\frac{1}{5!}(z-1)^4-\cdots$$

中不含负幂的项. 如果约定$\dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)}$在 $z=1$的值为1,

则$\dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)}$在$z=1$就成为解析的了.

2. 极点

如果在Laurent级数中只有有限多个$z-z_0$的负幂项, 且其中关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$, 即

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\ldots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots\quad (m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0),$$

则孤立奇点z_0称为函数$f(z)$的m阶极点.

例如,对有理分式函数$f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^3}$,

$z=1$是它的三级极点,$z=\pm i$是它的一阶极点.

极点的充要条件

将f(z)在孤立奇点z_0的一去心邻域展成

Laurent级数，则z_0为f(z)的$m>0$阶极点

$\Leftrightarrow$ (1)　Laurent级数中关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$;

$\Leftrightarrow$ (2) $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，$g(z)$在$z_0$的某去心邻域$0<|z-z_0|<\rho_0$

内解析，且$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$;

$\Leftrightarrow$ (3)　$\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$以z_0为m阶零点；

$\Leftrightarrow$ (4)　$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$（不能判定极点阶数）。

函数的零点与极点的关系

设函数 $f(z)$ 能表示成

$$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$在z_0解析或者以z_0为可去奇点, 且 $lim\,\varphi(z_0) \neq 0$, m为某一正整数, 则称z_0为$f(z)$的***m*阶零点**.

如 $f(z)$在z_0解析, 则z_0是$f(z)$的m阶零点的充要条件是: $\lim f^{(n)}(z_0)=0$, $(n=0,1,2,\ldots,m-1)$, $\lim f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

例: $f(z)=z(z-1)^3$, $z=0$与$z=1$是它的一阶与三阶零点.

例： 求 $f(z)=\dfrac{z^n}{e^z-1}$ $(n\le 0)$的极点。

解： $f(z)=\dfrac{1}{z^{1-n}\left(1+z/2!+\cdots+z^{m-1}/m!+\cdots\right)}$

$$\Rightarrow z=0\text{为}1-n\text{阶极点}.$$

$z=2k\pi i$为e^z-1的一阶零点$(k\ne 0)$

$$\Rightarrow z=2k\pi i\text{为}f(z)\text{的一阶极点}(k\ne 0).$$

3. 本性奇点

如果在Laurent级数中含有无穷多$z-z_0$的负幂项,则孤立奇点z_0称为$f(z)$的本性奇点.

例如$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$以$z=0$为它的本性奇点.因为

$e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$有无穷多负幂项。

4.4.3 函数在无穷远点的性态

如果函数 $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内解析,

称∞<u>为 $f(z)$的孤立奇点</u>.

变换$w=1/z: R<|z|<+\infty \to 0<|w|<1/R,$

令$\varphi(w)\overset{\Delta}{=}f(1/w)=f(z)$，在$0<|w|<1/R$内解析。

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{w\to 0}\varphi(w) \Rightarrow f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的奇点类型

等价于$\varphi(w)$在$w=0$的奇点类型。

定义：如果$w=0$是 $\varphi(w)$ 的可去奇点、（m阶）极点或本性奇点 $\Leftrightarrow z=\infty$是$f(z)$的可去奇点、（m阶）极点或本性奇点。

设函数$f(z)$在区域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，Laurent展式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n,$$

$\varphi(w)=f(\frac{1}{w})$的$Laurent$展式为：

$$\varphi(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{w^n},$$

解析函数在∞的性质

设$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析，$Laurent$展式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n z^n,$$

(1) 若$n>0$时，$\alpha_n=0$，则$z=\infty$是$f(z)$的可去奇点。

(2) $Laurent$展式中只有有限个（至少一个）正幂项，则$z=\infty$是$f(z)$的极点。

(3) $Laurent$展式中有无限个$\alpha_n\neq 0$，$n>0$ 则$z=\infty$是$f(z)$的本性奇点。

定理： 设函数$f(z)$在区域 $R<|z|<+\infty$ 内解析，那么$z=\infty$ 是$f(z)$的可去奇点、极点或本性奇点的充要条件是：

存在着极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 、无穷极限或不存在有限或无穷的极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

例:

(1) $f(z)=(z-2)(z^2+1)$.

$z=\infty$为唯一奇点: 3阶极点.

(2) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$. $z=0$与∞均为本性奇点.

(3) $f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}$.

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=1 \Rightarrow$ ∞为$f(z)$的可去奇点.

$z_k=1\Big/\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为本性奇点

$z=0$为非孤立奇点;

It’s The End!

Thank You!

习题四

A: 1, (1)(2)(4)(5)；2,偶数号;
4,(2)(4); 5,(4)(5); 7,(2)(4)；8; 10,(2);
11；12,偶数号；13,奇数号；14；15.

B: 4; 5; 8.