第五章　留数

纲要:

1 留数及留数定理

2 留数理论的应用

§5.1 留数及留数定理

5.1.1 定义

$f(z)$ 在孤立奇点z_0的某去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，且有Laurent展式：

$$f(z) = \ldots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \quad 0<|z-z_0|<R$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

C 为0<|z-z_0|<R内包含z_0的任意一条闭曲线。

$n=-1$时，有

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \Rightarrow \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}.$$

将Laurent展式两端沿C逐项积分。

称c_{-1}为$f(z)$在z_0的留数 Residual ，
记作 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$, 即

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=c_{-1}$$

5.1.2留数定理

设函数 $f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, ..., z_n 外处处解析，连续到边界C（正向简单闭曲线）, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证： 把C内的孤立奇点$z_k(k=1,2,\ldots,n)$用互不相交互不包含的正向简单闭曲线C_k围绕起来, 则根据复合闭路定理有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Res}[f(z),z_1] + \mathrm{Res}[f(z),z_2] + \cdots + \mathrm{Res}[f(z),z_n]$$

即 $$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z),z_k].$$ #

5.1.3. 留数的计算规则（极点）

规则1 如果z_0为$f(z)$的一阶极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

规则2 如果z_0为$f(z)$的m阶极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d} z^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}$$

规则3

设 $f(z)=P(z)/Q(z)$, $P(z),Q(z)$ 均在z_0处解析，如果$P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$,

则 z_0为$f(z)$的一**阶**极点, 而且

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

例： 计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$ ，C 为正向圆周$|z|=2$.

解： $z=0$为被积函数的一阶极点, $z=1$为二阶极点, 而

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.$$

所以 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\}$

$$=2\pi i(1+0)=2\pi i.$$

例：计算 I=$\oint_C \frac{1}{z^{101}\left(1-z^2\right)}dz$, C 为正向圆周$|z|=1/2$.

解：

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}(1-z^2)},z=0\text{为101阶极点}$$

在$0<|z|<1$内：

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}\Rightarrow C_{-1}=1\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),0]=1$$

$$\Rightarrow I=2\pi i.$$

5.1.4.在无穷远点的留数

设函数 $f(z)$在∞的去心邻域 $R<|z|<\infty$内解析, C为环域内绕原点的任何一条简单闭曲线, 则积分

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z$ 与C的形状无关, 称其为$f(z)$在∞点的留数, 记作

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty](=\mathrm{Res}\, f(\infty))=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

且

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z=-c_{-1}.$$

注：当∞为可去奇点时，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$不一定为零.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$，∞为可去奇点。

$f(z)$在$1<|z|<+\infty$内展开为Lauren级数：

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\, f(\infty)=-c_{-1}=1.$$

规则4

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right),0\right]$$

事实上,要求$f(z)$在$R<|z|<\infty$内Laurent展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$$ 在无穷远的留数为 $-c_{-1}$, 则

$$\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right)=w^{-2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n w^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n w^{-n-2}$$

中的w^{-1}项（n=-1的项）的系数, 即为c_{-1}.

定理5.2(扩展的留数定理）

如果 $f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 则 $f(z)$在所有各奇点(包括∞点)的留数总和必等于零.

证：除∞点外, 设$f(z)$的有限个奇点为$z_k(k=1,2,\ldots,n)$. 且C为一条绕原点的并将$z_k(k=1,2,\ldots,n)$包含在它内部的正向简单闭曲线, 则根据留数定理与在无穷远点的留数定义, 有

$$\operatorname{Res} f(\infty)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\,\mathrm{d}z=0.\#$$

例：计算 $\mathrm{I}=\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2}dz$

解：

$|z|<4$内有6个极点：$\pm i$(二阶)，$\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$(三阶)

$$\mathrm{I}=-2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(\infty)$$

$$\overset{z=1/w}{=}\ 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{w})\frac{1}{w^2},0]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{w(1+2w^4)^3(1+w^2)^2},0]=2\pi i$$

例：求积分 I= $\oint_{|z|=2} \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z} \mathrm{d}z$

解：函数 $f(z)=\frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

在1<|z|<+∞内解析，|z|=2在此圆环域内，把它在圆环域内展开得

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\frac{-1}{1-\frac{1}{z}}=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right).$$

故 $c_{-1}=-2$, $\Rightarrow I=2\pi i c_{-1}=-4\pi i$

It's The End！

Thank You！