第三章 多维随机变量及其分布

§ 3.1 二维随机变量及其分布

一、二维随机变量的联合分布函数

二维随机变量（X,Y）

X和Y的联合分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

$$-\infty<x,y<\infty$$

一维随机变量X

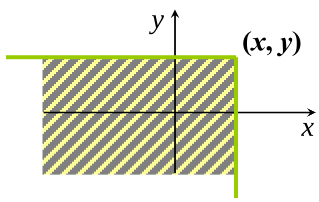
X的分布函数

$$F(x)=P(X\le x)$$

$$-\infty<x<\infty$$

分布函数的几何意义

如果用平面上的点 (x, y) 表示二维*r.v.* (X, Y)的一组可能的取值，则 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 的取值落入图所示角形区域的概率.



$F(x, y)$的性质

（1）关于x或y单调不减

（2）$0\le F(x,y)\le 1$

（3）$F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0$

$F(-\infty,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$

（4）分别关于x 或y右连续

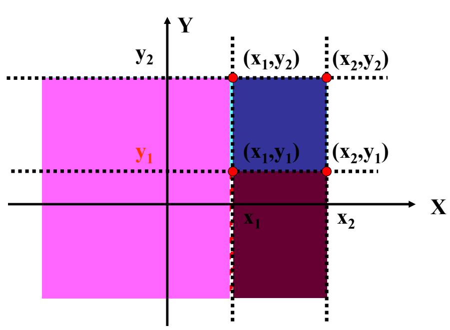
（5）对 $\forall x_1<x_2, y_1<y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)\ge 0$$

（区域演示图见下页）

(5) $F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)$

$=P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)\ge 0$



注：满足上述性质的函数可作为二维随机变量的分布函数

例 设

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x+y<1\\ 1, & x+y\ge 1\end{cases}$$

讨论$F (x, y)$能否成为二维随机变量的分布函数？

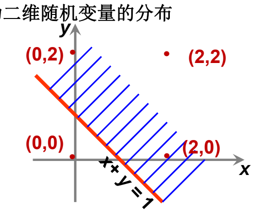
解

$F(2,2)-F(0,2)$

$-F(2,0)+F(0,0)$

$=1-1-1+0$

$=-1$

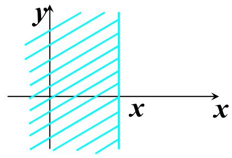


故 $F (x, y)$不能作为二维随机变量的分布函数

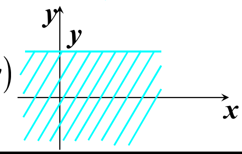
二维随机变量的边缘分布函数

由联合分布函数$\Longrightarrow$边缘分布函数, 逆不真.

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty, Y\le y)=F(+\infty, y)$$



例 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$$

其中A, B, C 为常数.

(1) 确定A, B, C;

(2) 求X 和Y 的边缘分布函数;

(3) 求$P(X>2)$

解 **(1)**

$$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow B=\frac{\pi}{2}, C=\frac{\pi}{2}, A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}, \quad -\infty<y<+\infty.$$

(3) $$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)=1/4.$$

可以将二维 ***r.v.***及其边缘分布函数的概念推广到 ***n*** 维 ***r.v.***及其联合分布函数与边缘分布函数

二、二维离散型随机变量

- 定义：若 (X,Y) 只取有限对或可列对实数值

$$(x_i, y_j), i.j=1,2\cdots\cdots$$

则称其为二维离散型随机变量。

二维随机变量（***X,Y***）	一维随机变量***X***
离散型	离散型
X和***Y*** 的联合概率分布列	***X***的概率分布列
$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$, $i,j=1,2,\ldots$	$P(X=x_k)=p_k$, $k=1,2,\ldots$
$\begin{cases} p_{ij}\ge 0, i,j=1,2,\cdots \\ \sum_i\sum_j p_{ij}=1\end{cases}$	$\begin{cases} p_k\ge 0, \; k=1,2,\ldots \\ \sum_k p_k=1\end{cases}$

二维随机变量（*X*,*Y*）

离散型

*X*和*Y*的联合分布函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$$

$$=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij}$$

一维随机变量*X*

离散型

*X*的分布函数

$$F(x)=P(X\le x)$$

$$=\sum_{x_k\le x} P(X=x_k)$$

$$=\sum_{x_k\le x} p_k$$

二维离散 *r.v.*的边缘分布列

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \overset{\text{记作}}{=} p_{i\bullet}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} \overset{\text{记作}}{=} p_{\bullet j}, \quad j=1,2,\cdots$$

由联合分布可确定边缘分布, 其逆不真.

(*X* ,*Y*) 的联合分布列

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

联合分布列及边缘分布列

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\bullet 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\bullet j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{i\bullet}$	$p_{1\bullet}$		$p_{i\bullet}$		1

例 二元两点分布

$Y \backslash p_{ij} \backslash X$	1	0	$p_{\bullet j}$
1	p	0	p
0	0	q	q
$p_{i\bullet}$	p	q	1

$p+q=1$ ， $0<p<1$

例 袋中有**3**只红球，**1**只白球，分别采用有放回和无放回地摸球，连续抽两次，每次一球，令

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸到红球}\\ 0 & \text{第一次摸到白球}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸到红球}\\ 0 & \text{第二次摸到白球}\end{cases}$$

求（*X*，*Y*）的联合分布和边缘分布。

例 已知随机变量X与Y的分布列分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

且$P(XY=0)=1$，试求二维随机变量(X，Y)的联合分布列。

三、二维连续型随机变量

二维随机变量（X,Y）连续型

X和Y的联合概率密度函数 $f(x,y)$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$f(x,y)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

一维随机变量X连续型

X的概率密度函数 $f(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$f(x)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

不难得出，对连续型 随机变量(X,Y)，其概率密度与分布函数的关系如下：

□ 对每个变元连续, 在$f(x,y)$的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

从而有 $P(x<X\le x+\Delta x, y<Y\le y+\Delta y)$

$$\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

□ $P(X=a, Y=b)=0$

$P(X=a, -\infty<Y<+\infty)=0$

$P(-\infty<X<+\infty, Y=a)=0$

若D是平面上的区域，则

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dv$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)du$$

与离散型相同,已知联合分布可以求得边缘分布；反之则不能唯一确定.

例 设 r.v.(X,Y)的联合 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中k为常数. 求

(1)常数 k；

(2) $P(X+Y\ge 1)$, $P(X<0.5)$;

(3)边缘 d.f. 与边缘分布函数;

(4)联合分布函数 $F(x,y)$

解 令 $D=\{(x,y)|\,0\le x\le y,0\le y\le 1\}$

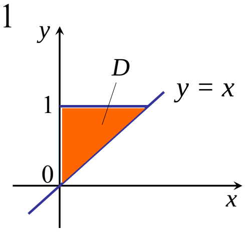
(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy=1$

$\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$

$=k\int_0^1 y\frac{y^2}{2}dy=\frac{k}{8}$

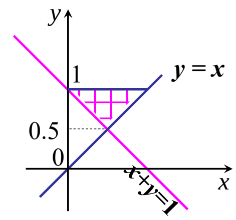
$\Rightarrow k=8$

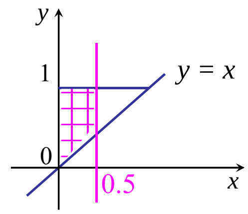


(2) $P(X+Y\ge 1)$

$=\int_{0.5}^1 dy\int_{1-y}^y 8xydx$

$=5/6.$





$P(X<0.5)$

$=\int_0^{0.5}dx\int_x^1 8xydy$

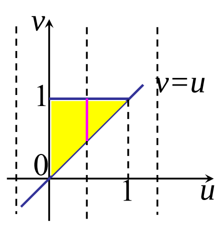
$=7/16.$

(3) 由联合密度求出边缘密度
再积分求边缘分布函数.

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv$

$=\begin{cases}\int_x^1 8xvdv, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



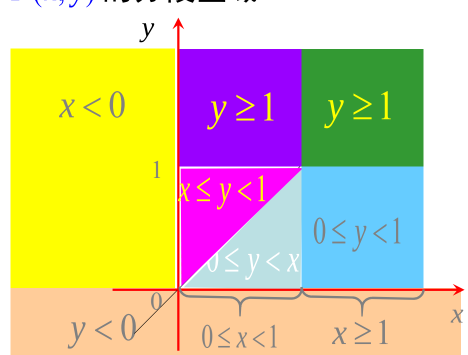
$$f_X(x)=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y^4, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

$F(x,y)$ 的分段区域



(4) $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$

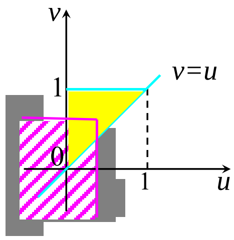
当$x<0$ 或 $y<0$ 时,
$F(x,y)=0$

当$0\le x<1,\ 0\le y<x$ 时,

$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uvdu=y^4$

当$0\le x<1,\ x\le y<1$时,

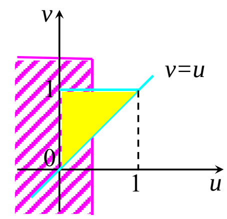
$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^y 8uvdv=2x^2y^2-x^4$



当$0\le x<1, y\ge 1$时,

$F(x,y)=\int_0^x du\int_u^1 8uvdv$

$=2x^2-x^4$



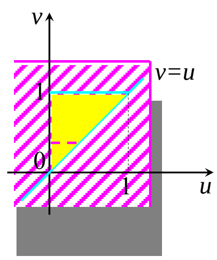
当$x\ge 1, 0\le y<1$时,

$F(x,y)=\int_0^y dv\int_0^v 8uvdu$

$=y^4$

当 $x\ge 1, y\ge 1$ 时,

$F(x,y)=1$

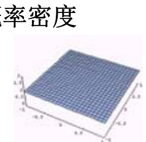


$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0\\ y^4, & 0\le x<1, 0\le y<x,\\ 2x^2y^2-x^4, & 0\le x<1,\ x\le y<1,\\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1, y\ge 1,\\ y^4, & x\ge 1, 0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1,\end{cases}$$

常见的二维分布:

设D是平面上的有界区域，其面积为A.
若二维随机变量（X,Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



则称（X,Y）在D上服从均匀分布.

- 若(X,Y)服从区域G上的均匀分布, 则

  $\forall\ G_1\subseteq G$, 设G_1的面积为A_1,

  $$P((X,Y)\in G_1)=\frac{A_1}{A}$$

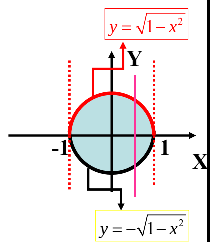
向平面上有界区域D上任投一质点，若质点落在D内任一小区域B的概率与小区域的面积成正比，而与B的位置无关．则质点的坐标（X,Y）在D上服从均匀分布.

- 边平行于坐标轴的矩形域上的均匀分布的边缘分布仍为均匀分布

例　设随机向量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中 $D=\{(x,y),x^2+y^2\le 1\}$，求X,Y的边缘密度函数.

解 (1)由题意得：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

当 $|x|>1$ 时，$f(x,y)=0$，

所以，$f_X(x)=0$

当$|x|\le 1$时，

$$f_X(x)=[\int_{-\infty}^{-\sqrt{1-x^2}}+\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty}]f(x,y)dy$$

$$=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

所以，

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

同理，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & |y|\le 1\\ 0 & |y|>1\end{cases}$$

例 设$(X,Y)\sim D$上的均匀分布，

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x,0\le x\le 1\}$$

求

(1) $f(x,y)$;

(2) $P(Y>X^2)$;

(3) (X,Y)在平面上的落点到y轴距离小于0.3的概率.

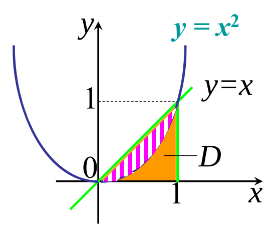
解 (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x,0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(Y>X^2)$

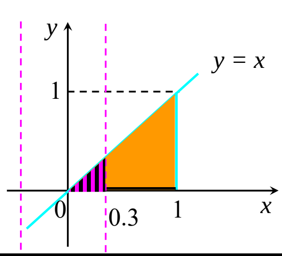
$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}2dy$$

$$=1/3.$$



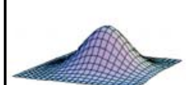
(3) $P(|X|<0.3)=P(-0.3<X<0.3)$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(0.3)^2=0.09$$



若二维随机变量（X,Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\right\}$$



其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数,且

$\sigma_1>0,\sigma_2>0,\ |\rho|<1$

则称（X,Y）服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.

记作（X,Y）$\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

正态分布的边缘分布仍为正态分布

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<+\infty$$

可以证明　若

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$$

则X,Y的边缘概率密度分别为

X~$N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$,　Y~ $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$

即　二维正态分布(X,Y)的边缘概率分布是一维正态分布，反之未必成立.

注：这是二维正态分布(X,Y)的特征，其他分布未必成立.

例　设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

求(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度.

解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(xy)dy\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}ydy\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

即　$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$　同理可得　$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

X,Y的边缘概率密度为一维正态分布.

所以, 边缘概率密度为一维正态分布的二维随机向量不一定是二维正态分布.

§ 3.2 二维随机变量的条件概率

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念.

在事件B 发生的条件下事件A 发生的条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个r.v X,Y， 在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

这个分布就是条件分布.

一、离散型随机变量的条件分布

实际上 类似定义在 $X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布律. 率概念在另一种形式

定义1 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}，\quad i=1,2,\ldots$$

为在 $Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律.

作为条件的那个r.v,认为取值是给定的，在此条件下求另一r.v的概率分布.

2

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质. 正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质.

例如：

$$P\{X=x_i|\ Y=y_j\}\ge 0\quad i=1,2,\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i|\ Y=y_j\}=1$$

3

例.已知(X, Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

求在$X=0$及$X=1$的条件下，Y的条件分布律;

解:先写出关于X和Y的边缘分布律

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
$p_{i\cdot}$	3/5	2/5	

$$P\{Y=0|X=0\}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=1|X=0\}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2},$$

在$X=0$的条件下，Y的条件分布律为

Y / X=0	0	1
P_k	1/2	1/2

同理在$X=1$的条件下，Y的条件分布律为

Y / X=1	0	1
P_k	3/4	1/4

二、连续型随机变量的条件分布

设(X,Y)是二维连续型r.v，由于对任意x, y, $P\{X=x\}=0$, $P\{Y=y\}=0$ ，所以不能直接用条件概率公式得到条件分布.

6

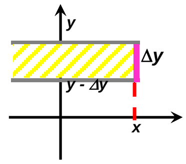
但在 $P(X \le x \mid Y = y)$ 中

在条件Y = y下
X 的分布函数

$P(Y = y) = 0$

设 $\Delta y > 0$

$$P(X \le x \mid y - \Delta y < Y \le y)$$
$$= \frac{P(X \le x, y - \Delta y < Y \le y)}{P(y - \Delta y < Y \le y)}$$
$$= \frac{F(x,y) - F(x, y - \Delta y)}{F_Y(y) - F_Y(y - \Delta y)}$$
$$= \frac{[F(x, y - \Delta y) - F(x,y)]/(-\Delta y)}{[F_Y(y - \Delta y) - F_Y(y)]/(-\Delta y)}$$



$$\lim_{\Delta y \to 0+} \frac{[F(x, y - \Delta y) - F(x,y)]/(-\Delta y)}{[F_Y(y - \Delta y) - F_Y(y)]/(-\Delta y)}$$

$$= \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)} \overset{\text{def.}}{=} P(X \le x \mid Y = y)$$

$f(x,y)$ 连续
$f_Y(y) \ne 0$, 连续

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

定义2 设 X 和 Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$,若对于固定的 y, $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度. 记为

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$ 为在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件分布函数. 记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{或} F_{X|Y}(x|y)$$

9

即

$$P\{X \le x | Y = y\} = F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

类似地,可以定义

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)} dv$$

10

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

$$\Downarrow$$

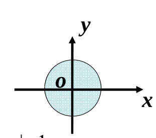
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{d}{dx} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

11

例 设 (X, Y) 服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y \mid x)$



解 X的边缘密度为

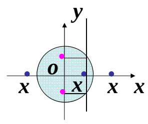
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$

12

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

当|x|<1时,有

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$



$$=\frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}$$

13

X作为已知变量

即 当 $|x|<1$ 时,有

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\\ 0, & y\ \text{取其它值}\end{cases}$$

X已知的条件下
Y的条件密度

这里是y的取值范围

注：该条件分布是均匀分布。

14

正态分布性质

正态分布的条件分布仍为正态分布

事实上 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

15

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]^2}$$

$$f_{X|Y}(x|y)\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

同理,

$$f_{Y|X}(y|x)\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

16

例 已知

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^2}, & x\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\leq x\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

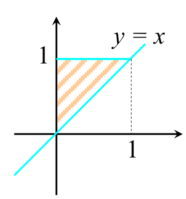
求 $P(X+Y\geq 1), P(Y<0.5), P\left(Y<\frac{2}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$

17

解 当 $f_X(x)>0$ 时，即 $0<x<1$ 时，

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$=\begin{cases}8xy, & x\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



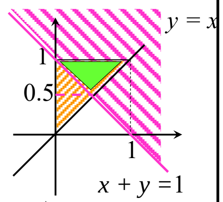
当 $f_X(x)=0$ 时，$f(x,y)=0$

故

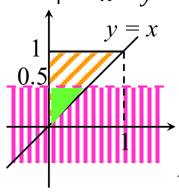
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leq x\leq y, 0\leq y\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

18

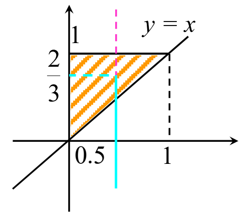
$$P(X+Y\geq 1)$$
$$=\int_{0.5}^{1}dy\int_{1-y}^{y}8xydx=\frac{5}{6}$$



$$P(Y<0.5)$$
$$=\int_{0}^{1/2}dy\int_{0}^{y}8xydx=\frac{1}{16}$$



$$P\left(Y<\frac{2}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{2/3}f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)dy$$
$$=\int_{1/2}^{2/3}\frac{2y}{1-(0.5)^2}dy$$
$$=\int_{1/2}^{2/3}\frac{8y}{3}dy=\frac{7}{27}$$



例：设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：（1）$f_X(x)$

（2）$f_{Y|X}(y|x)$

（3）$P(X>\frac{1}{2}|Y>0)$

§ 3.3 随机变量的独立性

—— 将事件独立性推广到 r.v.

两个 r.v. 的相互独立性

定义 设 (X,Y) 为二维 r.v. 若对任何实数 x, y 都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称 r.v. X 和 Y 相互独立

1

由定义知

二维 r.v. (X, Y) 相互独立

$\Leftrightarrow$ $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

$\Leftrightarrow$ $\forall a < b, c < d$

$$P(a < X \le b, c < Y \le d)$$
$$= P(a < X \le b)P(c < Y \le d)$$

$\Leftrightarrow$ $\forall a, c \in R$

$$P(X > a, Y > c) = P(X > a)P(Y > c)$$

2

离散型 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ 对一切 i, j 有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$$

即 $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

连续型 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow$ 对任何 x, y 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (a.e.)$$

二维随机变量 (X, Y) 相互独立，则边缘分布完全确定联合分布

3

二维连续 r.v. (X,Y) 相互独立

$\Rightarrow$ $f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y) > 0)$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x) > 0)$$

随机变量的函数

若 X 与 Y 相互独立，$g(x)$ 与 $h(y)$ 是两个确定函数，则 $g(X)$ 与 $h(Y)$ 也相互独立。

4

由上结论知 若 X, Y 为相互独立的 r.v.

则 $aX + b$, $cY + d$ 也相互独立；

X^2, Y^2 也相互独立；

随机变量相互独立的概念可以推广到 n 维随机变量

若 $P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$

$$= P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)\cdots P(X_n \le x_n)$$

则称 r.v. $X_1, X_2, \quad, X_n$ 相互独立

5

例 已知随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/3	a	b
2	1/6	1/9	1/18

试确定常数 a, b 使得 X 与 Y 相互独立。

6

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立

$\Longleftrightarrow\ \rho=0$

证 $\Longrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1,y=\mu_2$

7

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho=0$

$\Longleftarrow$ 将 $\rho=0$ 代入 $f(x,y)$ 即得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

8

例 已知 (X,Y) 的联合 d.f.为

(1) $f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

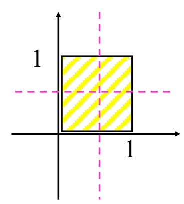
(2) $f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

讨论X,Y是否独立?

9

解

(1) 由图知边缘 d.f. 为



$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

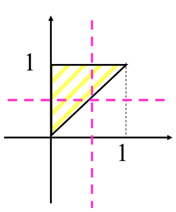
显然,

$$f_1(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故 X,Y 相互独立

10

(2) 由图知边缘 d.f. 为



$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然,

$$f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X,Y 不独立

11

独立性定理

设$f(x,y)$是连续二维 r.v. (X,Y)的联合d.f.,则X与Y相互独立的充分必要条件是存在非负可积函数$r(x)$, $g(y)$, 使得

$$f(x,y)=r(x)g(y)\quad -\infty<x,y<+\infty$$

在一切连续点上成立。

且 $f_X(x)=\dfrac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx}$ $\quad f_Y(y)=\dfrac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy}$

12

利用此结果,不需计算即可得出(1)中的 r.v. X 与 Y 是相互独立的.

再如, 服从矩形域$\{(x,y)|\ a<x<b,\ c<y<d\}$上均匀分布的二维 r.v.(X ,Y),

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b, c<y<d\\ 0 & 其他\end{cases}$$

X ,Y 是独立, 且其边缘分布也是均匀分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c<y<d\\ 0, & 其他\end{cases}$$

13

若

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y} & x>0, y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

则X ,Y 是相互独立的,且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

14

若

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-3y} & -1<x<2, y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

则X ,Y 是相互独立的, 且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

15

注意：若两个随机变量相互独立，且又有相同的分布，不能说这两个随机变量相等. 如，

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X ,Y 相互独立，则

Y \ X (p_{ij})	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$P(X=Y)=0.5$, 故不能说 $X=Y$.

§3.5 多维随机变量函数的分布

在第二章中，我们讨论了一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论：

当随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的联合分布已知时，如何求出它们的函数

$$Y=g(X_1, X_2, \ldots, X_n),\quad i=1,2,\ldots,m$$

的分布?

我们先讨论两个随机变量的函数的分布问题，然后将其推广到多个随机变量的情形.

1

一、离散型分布的情形

和的分布：$Z = X + Y$

例　若X、Y独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

$P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

求$Z=X+Y$的概率函数.

解：
$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$
$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{r} P(X=i)P(Y=r-i)$$
$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \quad r=0,1,2,\ldots$$

由独立性

此即离散卷积公式

例　已知随机变量(X, Y)的联合分布列为

X \ Y	1	2	3
1	1/5	0	1/5
2	1/5	1/5	1/5

求$Z_1 = X+Y, Z_2 = \max\{X, Y\}$的分布列.

3

例　若X和Y相互独立,它们分别服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布,证明$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布

解：依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \quad i=0,1,2,\ldots$$

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!} \quad j=0,1,2,\ldots$$

由卷积公式

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$

4

由卷积公式

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r} P(X=i, Y=r-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{r} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{r-i}$$
$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\quad r=0,1,\ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

5

具有可加性的两个离散分布

- 设 $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 且独立，
  则 $X + Y \sim B(n_1+n_2, p)$
- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立，
  则 $X + Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

6

二、连续型分布的情形

(1) 和的分布：$Z = X + Y$

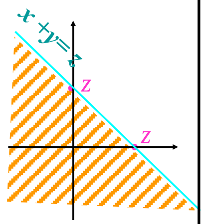
例 设X和Y的联合密度为 $f(x,y)$,求 $Z=X+Y$ 的密度

解: $Z=X+Y$ 的分布函数是:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$$
$$=\iint_D f(x,y)dxdy$$

这里积分区域 $D=\{(x,y): x+y\le z\}$

是直线 $x+y=z$ 左下方的半平面.



7

$$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

化成累次积分,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$
$$=\int_{-\infty}^{z-y}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

由X和Y的对称性, $f_Z(z)$ 又可写成

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$

以上两式是两个随机变量和的概率密度的一般公式. 8

特别，当X和Y独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ，则上述两式化为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\,f_Y(y)dy$$
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为**卷积公式**．记为

$$f_Z(z)=f_X(z)*f_Y(z)=f_Y(z)*f_X(z)$$

9

推广：已知 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$
求 $Z=aX+bY+c$ 的密度函数,
其中 a,b,c为常数，$a,b\neq 0$

$$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t,\frac{z-at-c}{b}\right)dt$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z-bt-c}{a},t\right)dt$$

10

例 已知 (X,Y) 的联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$,求 $f_Z(z)$

解法一（图形定限法）

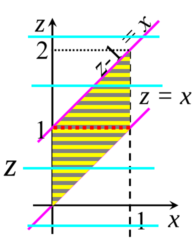
显然 X,Y 相互独立,且

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

11

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)dx$$
$$=\int_0^1 f_Y(z-x)dx$$

$$f_Y(z-x)=\begin{cases}1, & z-1<x<z\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$\int_0^1 f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2,\\ \int_0^z 1dx, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^1 1dx, & 1<z<2,\end{cases}$$

12

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2\\ z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}$$

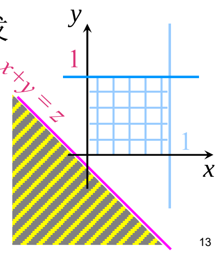
解法二　从分布函数出发

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)$$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

当$z<0$时，

$$F_Z(z)=0$$



13

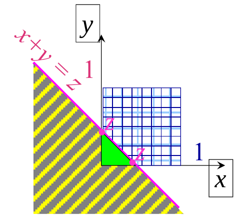
当$0\le z<1$时，

$$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}1dy$$

$$=\int_0^z(z-x)dx$$

$$=z^2/2$$

$$\Rightarrow\quad f_Z(z)=z$$



14

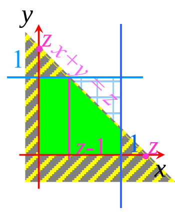
当$1\le z<2$时，

$$F_Z(z)=(z-1)+\int_{z-1}^1 dx\int_0^{z-x}1dy$$

$$=z-1+\int_{z-1}^1(z-x)dx$$

$$=2z-z^2/2-1$$

$$\Rightarrow\quad f_Z(z)=2-z$$



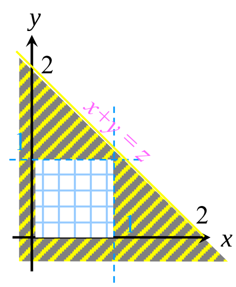
15

当$2\le z$时，

$$F_Z(z)=1$$

$$f_Z(z)=0$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\text{或}z>2\\ z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\end{cases}$$



16

例 已知(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$,求$f_Z(z)$

解

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

$$f(x,z-x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, x<z<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$z<0$或$z>2$,

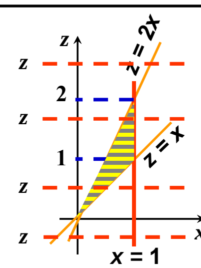
$$f_Z(z)=0$$

当$0<z<1$,

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{z}3xdx=\frac{9}{8}z^2$$

当$1<z<2$,

$$f_Z(z)=\int_{z/2}^{1}3xdx=\frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4})$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{2}(1-\frac{z^2}{4}), & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

这比用分布函数做简便

正态随机变量的结论

❑ 若X ,Y 相互独立, $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

则 $X\pm Y\sim N(\mu_1\pm\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

推广 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$

则 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$

20

(2) 商的分布： $Z = X / Y$

例如 已知(X ,Y)的联合$d.f.\ f(x,y)$，令 $Z = X / Y$, 求 $f_Z(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{X}{Y}\le Z)$$

$$=\iint_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}(\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)dx)dy+\int_{-\infty}^{0}(\int_{yz}^{+\infty}f(x,y)dx)dy$$

21

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F(z)$$

$$=\int_0^{+\infty}f(zy,y)ydy-\int_{-\infty}^{0}f(zy,y)ydy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(zy,y)|y|dy$$

X与Y相互独立时

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(zy)f_Y(y)|y|dy$$

22

例 已知(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求$Z = X / Y$ 的 $p.d.f.$

解 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(zv,v)|v|dv$$

其中 $f(zv,v)=\begin{cases}e^{-(zv+v)}, & z>0,v>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

23

当$z\le 0$ 时 $f_Z(z)=0$, $z>0$ 时

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}ye^{-(z+1)y}dy=-\frac{1}{z+1}\int_0^{+\infty}yde^{-(z+1)y}$$

$$=-\frac{1}{z+1}(ye^{-(z+1)y}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-(z+1)y}dy)$$

$$=\frac{1}{z+1}\int_0^{+\infty}e^{-(z+1)y}dy=\frac{1}{(z+1)^2}$$

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}1/(z+1)^2, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

24

例：设二维随机变量 (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=X\cdot Y$ 的密度函数。

25

(3) 平方和的分布: $Z=X^2+Y^2$

设(X,Y)的联合 d.f. 为 $f(x,y)$，则

$$F_Z(z)=P(X^2+Y^2\le z)$$

$$=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy & z\ge 0, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr, & z\ge 0, \end{cases}$$

26

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin\theta)d\theta, & z\ge 0, \end{cases}$$

例如，$X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$, X,Y 相互独立， $Z=X^2+Y^2$, 则

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\cos^2\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z\sin^2\theta}{2}}d\theta, & z\ge 0, \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 0, \end{cases}$$ 称为 自由度为2的χ^2分布

27

(4) 极值分布：即极大(小)值的分布

仅就独立情形讨论极值分布

离散随机变量的极值分布
可直接计算

28

设连续随机变量X,Y相互独立，$X\sim F_X(x)$, $Y\sim F_Y(y)$, $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 求 M,N 的分布函数.

$$F_M(u)=P(\max\{X,Y\}\le u)$$
$$=P(X\le u, Y\le u)$$
$$=P(X\le u)P(Y\le u)$$
$$=F_X(u)F_Y(u)$$

29

$$F_N(v)=P(\min\{X,Y\}\le v)$$
$$=1-P(\min\{X,Y\}>v)$$
$$=1-P(X>v,Y>v)$$
$$=1-P(X>v)P(Y>v)$$
$$=1-[1-F_X(v)][1-F_Y(v)].$$

30

推广

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，且

$$X_i \sim F_i(x_i), \quad i = 1,2,\cdots,n$$
$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$
$$N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

则 $$F_M(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i(u)$$

$$F_N(v) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(v))$$

31

例 系统 L 由相互独立的 n 个元件组成，其连接方式为 (1)串联; (2)并联; 若 n 个元件寿命分别为$X_1, X_2, \cdots, X_n$且

$$X_i \sim Exp(\lambda), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

求在以上 两 种组成方式下, 系统 L 的寿命 X 的 $d.f.$

32

解

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i > 0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x_i}, & x_i > 0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

33

(1) $X = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_X(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x))$$

$$1 - F_{X_i}(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 1, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

34

(2) $X = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

35

例 $G = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$，$(X, Y)$

为G内的均匀分布，求, $Z_1 = \max(X, Y)$

$Z_2 = \min(X, Y)$ 的分布密度函数与分布函数.

解 （法1）用定义求.

（法2）可知矩形内的均匀分布的 X , Y 是相互独立的.

$$F_{z_1}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{2} z^2 & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2} z & 1 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{z_2}(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ 1-(1-\frac{z}{2})(1-z) & 0\le z<1 \\ 1 & z\ge 1 \end{cases}$$