什么是参数估计？

参数是刻画总体某方面的概率特性的数量.

当这个数量是未知的时候，从总体抽出一个样本，用某种方法对这个未知参数进行估计就是参数估计.

例如，$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,

若μ, σ^2未知，通过构造样本的函数, 给出它们的估计值或取值范围就是参数估计的内容.

点估计　区间估计

1

参数估计的类型

点估计(point Estimation) —— 估计未知参数的值

区间估计(interval Estimation)—— 估计未知参数的取值范围，使得这个范围包含未知参数真值的概率为给定的值.

2

§ 7.1　点估计法

点估计的思想方法

设总体X 的分布函数的形式已知，但它含有一个或多个未知参数：$\theta_1,\theta_2, \ldots,\theta_k$

设 $X_1, X_2,\ldots, X_n$为总体的一个样本

构造 k 个统计量：

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \theta_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{array}\right\}\ \text{随机变量}$$

3

当测得一组样本值$(x_1, x_2,\ldots, x_n)$时，代入上述统计量，即可得到 k 个数：

$$\left.\begin{array}{l}\hat\theta_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat\theta_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat\theta_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{array}\right\}\ \text{数值}$$

称数$\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_k$ 为未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计值

对应的统计量为未知参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计量

Q：如何构造统计量？

如何评价估计量的好坏？

4

常用的点估计方法

❑ 频率替换法

利用事件A 在 n 次试验中发生频率 $\frac{n_A}{n}$ 作为事件A 发生的概率 p 的估计量

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{p} p$$

5

例1　设总体$X \sim N(\mu, 2)$, 在对其作28 次独立观察中, 事件 “$X < 4$”出现了21 次, 试用频率替换法求参数 μ的估计值.

解　由 $P(X<4)=\Phi(\frac{4-\mu}{\sqrt2})\approx\frac{21}{28}=0.75$

查表得　$\frac{4-\mu}{\sqrt2}=0.675$

于是 μ的估计值为　$\hat\mu\approx3.045$

6

❑ 顺序统计量法

不论X服从什么分布，都可以用样本中位数作为总体均值的估计量，用样本极差作为总体均方差的估计量

例 一面粉厂用自动生产线包装面粉，现在一批产品中随机抽取10袋，测得重量（单位：kg）如下：

25.3	24.7	24	24.8	25.4
25.0	24.9	24.6	25.2	25.1

试用顺序统计量法分别估计总体均值和方差。

❑ 矩估计法

方法　用样本的 k 阶矩作为总体的 k 阶矩的估计量, 建立含有待估计参数的方程, 从而可解出待估计参数

设待估计的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$

设总体的 r 阶矩存在，记为

$$E(X^r)=\mu_r(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

设 $X_1, X_2,\ldots, X_n$为一样本，样本的 r 阶矩为

$$B_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$$

令

$$\mu_r(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r \qquad r=1,2,\cdots,k$$

—— 含未知参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 的方程组

解方程组，得 k 个统计量：

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)\end{array}\right\}$$

——未知参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 的矩估计量

代入一组样本值得k个数:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{array}\right\}$$

——未知参数 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 的矩估计值

一般地，不论总体服从什么分布，总体期望 μ 与方差σ^2 存在，则它们的矩估计量分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S_n^2$$

事实上，按矩法原理，令

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mu \\ A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = A_2 - \hat{\mu}^2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

13

例 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本，求 μ, σ^2 的矩法估计量。

解 $\hat{\mu}_{矩} = \bar{X}$

$$\hat{\sigma}^2_{矩} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

例 设总体 $X \sim E(\lambda)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本，求λ的矩法估计量。

解 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ 令 $\bar{X} = \frac{1}{\lambda}$

故 $\hat{\lambda}_{矩} = \frac{1}{\bar{X}}$

14

例 设从某灯泡厂某天生产的一大批灯泡中随机地抽取了10只灯泡，测得其寿命为(单位：小时)：

1050， 1100， 1080， 1120， 1200
1250， 1040， 1130， 1300， 1200

试用矩法估计该厂这天生产的灯泡的平均寿命及寿命分布的标准差.

解

$$\hat{E}(X) = \bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1147(h)$$

$$\hat{D}(X) = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = 6821$$

$$\sqrt{\hat{D}(X)} = 79.25(h)$$

15

例 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知，求 a, b 的矩法估计量.

解 由于 $E(X) = \frac{a+b}{2}$，$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

令

$$\begin{cases} \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \bar{X} \\ \frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12} + \left(\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}\right)^2 = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

16

解得

$$\hat{a}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$$

$$= \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{b}_{矩} = \bar{X} + \sqrt{3(A_2 - \bar{X}^2)}$$

$$= \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

17

例

不能用 估计

可以用 估计

例 X~ poisson

矩估计不唯一。

矩估计的优缺点。

18

❑ 点估计的最大似然估计法

思想方法：一次试验就出现的事件有较大的概率

例如: 有两个外形相同的箱子,都装有100个球
一号箱 99个白球， 1个红球
二号箱 1个白球， 99个红球
现从两箱中任取一箱，并从箱中任取一球，结果所取得的球是白球。

问 所取的球来自哪一箱？

答： 极有可能是第一箱.

例 设总体 X 服从0-1分布,且$P(X=1)=p$, 用最大似然法求 p 的估计值.

解 总体 X 的概率分布为

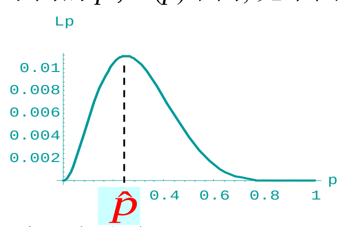
$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x},\quad x=0,1$$

设 $x_1,x_2,\ldots,x_n$为总体样本$X_1,X_2,\ldots,X_n$的样本值,

则 $P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$

$$=p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}=L(p)\quad x_i=0,1,i=1,2,\cdots,n$$

对于不同的 p , $L(p)$不同, 见下图



现经过一次试验,事件

$$(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

发生了， 则 p 的取值应使这个事件发生的概率最大.

在容许范围内选择 p， 使$L(p)$最大

注意到，$\ln L(p)$是 L 的单调增函数,故若某个p 使$\ln L(p)$最大, 则这个p 必使$L(p)$最大。

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-p}\overset{令}{=}0\quad\Rightarrow\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar{x}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\ln L}{\mathrm{d}p^2}=-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{(1-p)^2}<0\right)$$

所以 $\hat{p}=\bar{x}$ 为所求 p 的估计值.

一般, 设 X 为离散型随机变量, 其分布律为

$$P(X=x)=f(x,\theta),\quad x=u_1,u_2,\cdots,\theta\in\Theta$$

则样本 $X_1,X_2,\ldots,X_n$的概率分布为

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

$$=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$$

$$\overset{记为}{=}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)\overset{或}{=}L(\theta)\qquad x_i=u_1,u_2,\cdots,\ i=1,2,\cdots,n,\theta\in\Theta$$

称 $L(\theta)$ 为样本的似然函数

最大似然法的思想

选择适当的$\theta=\hat{\theta}$,使$L(\theta)$取最大值, 即

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}\{f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)\}$$

称这样得到的 $\hat{\theta}=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

为参数 θ 的最大似然估计值 简记 $\hat{\theta}_{mle}$

称统计量 $\hat{\theta}=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

为参数 θ 的最大似然估计量 简记 $\hat{\theta}_{MLE}$

注1 若 X 连续, 取 $f(x_i,\theta)$为X_i 的密度函数

似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

注2 未知参数可以不止一个, 如$\theta_1,\ldots,\theta_k$

设X 的密度(或分布)为 $f(x,\theta_1,\cdots,\theta_k)$

则定义似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$
$$=L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

$-\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n \qquad (\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta$

25

若 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 关于 $\theta_1,\ldots,\theta_k$可微,则称

$$\frac{\partial}{\partial\theta_r}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=0 \qquad r=1,2,\cdots,k$$

为似然方程组

若对于某组给定的样本值 $x_1,x_2,\ldots,x_n$,

参数 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_k$ 使似然函数取得最大值, 即

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k)$$
$$=\max_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta}\{L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\}$$

则称 $\hat\theta_1,\cdots,\hat\theta_k$ 为$\theta_1,\ldots,\theta_k$ 的最大似然估计值

26

显然,

$$\hat\theta_r=g(x_1,x_2,\cdots,x_n) \qquad r=1,2,\cdots,k$$

称统计量

$$\hat\theta_r=g(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad r=1,2,\cdots,k$$

为$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ 的最大似然估计量

27

例 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是 X 的样本值, 求 μ,σ^2 的最大似然估计.

解 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\mu,\sigma^2)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L=-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$$

28

似然方程组为

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L\right)=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\ln L\right)=\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\dfrac{n}{2(\sigma^2)}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat\mu_{mle}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar x\\ \hat\sigma^2_{mle}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar x)^2\end{cases}$$

μ,σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar X,\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar X)^2=S_n^2$$

29

最大似然估计方法

1） 写出似然函数 L

2）求出 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_k$ ，使得

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_k)$$
$$=\max_{(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta}\{L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\}$$

30

若 L是 $\theta_1,\cdots,\theta_k$的可微函数,解似然方程组

$$\frac{\partial}{\partial\theta_r}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=0 \quad r=1,2,\cdots,k$$

可得未知参数的最大似然估计值 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_k$ 然后, 再求得最大似然估计量.

若 L不是 $\theta_1,\cdots,\theta_k$的可微函数, 需用其它方法求最大似然估计值. 请看下例:

31

例 设 $X \sim U(a,b)$, $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 是 X 的一个样本值, 求 a , b 的最大似然估计值与最大似然估计量.

解 X 的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$$

似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a<x_i<b,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

32

似然函数只有当 $a < x_i < b, i = 1,2,\ldots, n$ 时才能获得最大值, 且 $b - a$ 越小, L 越大.

令 $x_{\min} = \min\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$

$x_{\max} = \max\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$

取 $\hat a = x_{\min}$, $\hat b = x_{\max}$

则对满足 $a \le x_{\min} \le x_{\max} \le b$ 的一切 $a < b$,

都有 $$\frac{1}{(b-a)^n}\le\frac{1}{(x_{\max}-x_{\min})^n}$$

33

故 $\hat a = x_{\min}$, $\hat b = x_{\max}$

是 a , b 的最大似然估计值.

$$X_{\min}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

$$X_{\max}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

分别是 a , b 的最大似然估计量.

34

例 设 $X \sim U(a - ½,\ a + ½)$, $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 是 X的一个样本, 求 a 的最大似然估计值.

解 由上例可知, 当

$$\hat a-\frac12\le x_{\min}\le x_{\max}\le\hat a+\frac12$$

时, L 取最大值 1, 即

$$x_{\max}-\frac12\le\hat a\le x_{\min}+\frac12$$

显然, a 的最大似然估计值不惟一.

35

任何一个统计量

$$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

若满足

$$x_{(n)}-\frac12\le g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le x_{(1)}+\frac12$$

都可以作为 a 的估计量.

36

常见分布的最大似然估计

分布	待估参数	最大似然估计
二项	p	$\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m} X_i$
泊松	λ	$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
指数	λ	$\hat{\lambda} = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} X_i$
正态	μ	$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
正态	σ^2	$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

37

最大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计值，$u(\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ 是 θ 的连续函数，

则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计值.

38

如 在正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中，σ^2 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ 是 σ^2 的单值函数，且具有单值反函数，故 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

$\lg\sigma$ 的最大似然估计值为

$$\lg\hat{\sigma} = \lg\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

注：矩估计不具有这个性质.

39

矩估计就不具有这个性质.

例 设 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,\ D(X) = \left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为总体的样本

由矩法，令

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = \overline{X}$$

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

得 σ 与 σ^2 的矩法估计量为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \ne (\hat{\sigma})^2$$

— 不具有不变性

例：设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知，$(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本。求 $g(\mu,\sigma^2) = P(X>3)$ 的最大似然估计。

42

7.2 点估计的评价标准

对于同一个未知参数，不同的方法得到的估计量可能不同，于是提出问题

- 应该选用哪一种估计量?
- 用什么标准来评价一个估计量的好坏?

常用标准
- (1) 无偏性
- (2) 有效性
- (3) 一致性

1

- 无偏性

定义 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X 的样本 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体参数θ 的估计量 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意$\theta\in\Theta$都有

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ 的无偏估计量.

2

例1 设总体X 的 k 阶矩$\mu_k=E(X^k)$存在 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体X 的样本，

证明：不论 X 服从什么分布，$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是 μ_k 的无偏估计量.

证 由于$E(X_i^k)=\mu_k \quad i=1,2,\cdots,n$ 因而

$$E(A_k)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu_k=\mu_k$$

3

特别地，

样本均值$\overline{X}$ 是总体期望 $E(X)$ 的无偏估计量

样本二阶原点矩 $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是总体二阶原点矩$\mu_2=E(X^2)$ 的无偏估计量

4

例2 设总体 X 的期望 $E(X)$与方差 $D(X)$存在，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 X 的一个样本，$n>1$

(1)$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$不是 $D(X)$ 的无偏估计量;

(2)$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})$是 $D(X)$ 的无偏估计量.

证 前已证 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$

$$E(X_i)=E(X)=\mu,\ D(X_i)=D(X)=\sigma^2$$

$$E(\overline{X})=E(X)=\mu,\ D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

5

因而 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-E(\overline{X}^2)$

$$=(\sigma^2+\mu^2)-(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故 $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\sigma^2$ 证毕.

6

例3 设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 是总体 X 的一个样本，$X \sim B(n, p)$ $n > 1$，求 p^2 的无偏估计量.

解 由于样本矩是总体矩的无偏估计量以及数学期望的线性性质，只要将未知参数表示成总体矩的线性函数，然后用样本矩作为总体矩的估计量，这样得到的未知参数的估计量即为无偏估计量.

令 $\overline{X} = E(X) = np$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 = E(X^2) = (np)^2 + np(1-p)$$

故 $(n^2 - n)p^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \overline{X}$

因此，p^2 的无偏估计量为

$$\hat{p}^2 = \frac{1}{n^2 - n}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - \overline{X}\right) = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i(X_i - 1)}{n(n-1)}$$

例4 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \theta > 0 \text{ 为常数}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的一个样本

证明 $\overline{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量

证 $X \sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$ $\quad E(X) = \theta$

故 $E(\overline{X}) = E(X) = \theta$

$\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量

令 $Z = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_Z(z) = 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \cdots, X_n > z)$$
$$= 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z)\cdots P(X_n > z)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(X_i \le z)) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \ge 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{n}{\theta} e^{-\frac{nz}{\theta}} & z \ge 0 \end{cases}$$

即 $Z \sim E\left(\frac{n}{\theta}\right)$ $\quad E(Z) = \frac{\theta}{n}$ $\quad E(nZ) = \theta$

故 nZ 是 θ 的无偏估计量.

- 有效性

定义 设 $\hat{\theta}_1 = \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

$\hat{\theta}_2 = \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

都是总体参数 θ 的无偏估计量，且

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

例5 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 X 的一个样本，密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0, \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \theta > 0 \text{ 为常数}$$

由前面例4 可知，$\overline{X}$ 与 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量，问哪个估计量更有效？

解 $D(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n}$，$D(n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) = \theta^2$

所以，$\overline{X}$ 比 $n\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 更有效.

例6 设总体期望为 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体X 的一个样本

(1) 设常数 $c_i \neq \frac{1}{n}$ $\quad i=1,2,\cdots,n.$ $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i=1.$

证明 $\hat{\mu}_1=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量

(2) 证明 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 比 $\hat{\mu}_1=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 更有效

证: (1) $E(\hat{\mu}_1)=\sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} c_i\mu=\mu$

13

(2) $D(\hat{\mu}_1)=\sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} c_i^2$

而 $$1=\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} c_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} c_i c_j$$

$$<\sum_{i=1}^{n} c_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}(c_i^2+c_j^2)=n\sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i^2>\frac{1}{n}$ $\quad\Rightarrow D(\hat{\mu})=\frac{1}{n}\sigma^2<D(\hat{\mu}_1)$

结论 算术均值比加权均值更有效.

14

(2) 证法二

$$D(\hat{\mu}_1)=\sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

而 $f=\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ 在条件 $\sum_{i=1}^{n} c_i=1$ 下的极值

在函数

$$F=\sum_{i=1}^{n} c_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} c_i-1\right)$$

的驻点处达到. (拉格朗日乘数法)

$$\begin{cases} 2c_1+\lambda=0 \\ 2c_2+\lambda=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2c_n+\lambda=0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i=1 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_n=\frac{1}{n}$$

因而当 $c_1=c_2=\cdots=c_n=\frac{1}{n}$

时函数 $f=\sum_{i=1}^{n} c_i^2$ 取得极小值

(2)得证

例如 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, (X_1,X_2) 是一样本.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mu}_1&=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2 \\ \hat{\mu}_2&=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2 \\ \hat{\mu}_3&=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2 \end{aligned}\right\} \text{都是}\mu\text{的无偏估计量}$$

由例6(2) 知 $\hat{\mu}_3$ 最有效.

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{4}{9}D(X_1)+\frac{1}{9}D(X_2)=\frac{5}{9}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{5}{8}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2}\sigma^2$$

17

罗—克拉美（$Rao-Cramer$）不等式

若 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量, 则

$$D(\hat{\theta})\ge\frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(X,\theta)\right]^2}=D_0(\theta)$$

其中 $p(x,\theta)$ 是总体 X 的概率分布或密度函数，称 $D_0(\theta)$为方差的下界.

当 $D(\hat{\theta})=D_0(\theta)$时, 称 $\hat{\theta}$ 为达到方差下界的无偏估计量, 此时称 $\hat{\theta}$为最有效的估计量, 简称有效估计量.

18

例7 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \theta>0 \text{ 为常数}$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 X 的一个样本值.

求 θ 的最大似然估计量, 并判断它是否达到方差下界的无偏估计量.

解 由似然函数

$$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}} \longrightarrow \ln L(\theta)=-n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$$

19

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}\overset{令}{=}0$$

$$\Longrightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\bar{x}$$

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar{X}$

它是 θ 的无偏估计量.

$$D(\hat{\theta})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{\theta^2}{n}$$

20

而 $\ln f(x,\theta)=-\ln\theta-\frac{x}{\theta}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2=\left[-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}\right]^2$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2=E\left[-\frac{1}{\theta}+\frac{X}{\theta^2}\right]^2=\frac{1}{\theta^2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)\right]^2}=\frac{\theta^2}{n}=D(\bar{X})$$

故 $\bar{x}$ 是达到方差下界的无偏估计量.

21

一致性

定义 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体参数 θ 的估计量. 若对于任意的 $\theta\in\Theta$, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ, 即 $\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|\ge\varepsilon)=0$$

则称 $\hat{\theta}$ 是总体参数 θ 的一致(或相合)估计量.

一致性估计量仅在样本容量 n 足够大时,才显示其优越性.

22

关于一致性的两个常用结论

1. 样本 k 阶矩是总体 k 阶矩的一致性估计量. } 由大数定律证明

2. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量, 且 $\lim_{n\to\infty}D(\hat{\theta})=0$, 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量 } 用切贝雪夫不等式证明

矩法得到的估计量一般为一致估计量

23

例8 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad \theta>0$ 为常数

则 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏、有效、一致估计量.

证 由例7 知 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏、有效估计量.

$$\lim_{n\to\infty}D(\bar{X})=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta^2}{n}=0$$

所以 $\bar{X}$ 是 θ 的一致估计量, 证毕.

24

练习. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 X 的一个样本

求常数 k ,使 $k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|$ 为σ的无偏估计量

解

$$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|\right) = k\left(\sum_{i=1}^{n} E|X_i - \bar{X}|\right)$$

注意到 $X_i - \bar{X}$ 是 $X_1, X_2, \ldots, X_n$的线性函数,

$$X_i - \bar{X} = \frac{1}{n}\left(-X_1 - X_2 \cdots + (n-1)X_i - \cdots - X_n\right)$$

$$E(X_i - \bar{X}) = 0 \qquad D(X_i - \bar{X}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$X_i - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$$

$$E(|X_i - \bar{X}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dz$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\frac{n-1}{n}\sigma^2}} dz$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$$

故

$$E\left(k\sum_{i=1}^{n}|X_i - \bar{X}|\right) = k\left(\sum_{i=1}^{n} E|X_i - \bar{X}|\right)$$

$$= kn\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sigma$$

$$\Longrightarrow \quad k = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$$

§ 7.3 区间估计

引例 已知 $X \sim N(\mu, 1)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是一组样本值

μ 的无偏、有效点估计为 $\overline{X}$

$\mu \downarrow$ 常数　　　$\overline{X} \downarrow$ 随机变量

不同的样本值算得的 μ 的估计值不同，因此除了给出未知参数的点估计外，还希望根据所给的样本确定一个随机区间，使其包含参数真值的概率达到指定的要求.

1

如引例中，若要找一个区间,使其包含μ的真值的概率为0.95.（设 $n = 5$）

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

取　$\alpha = 0.05$

查表得　$z_{\alpha/2} = 1.96$

2

这说明 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}\right| \ge 1.96\right) = 0.05$

即 $P\left(\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5} \le \mu \le \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5}\right) = 0.95$

称随机区间 $\left(\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5},\ \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5}\right)$

为未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间.

3

置信区间的意义

反复抽取容量为5 的样本，都可得到一个区间,这个区间可能包含未知参数 μ 的真值,也可能不包含未知参数的真值, 包含真值的区间占95%.

$(\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5},\ \overline{X} + 1.96\sqrt{1/5})$ —— μ 的置信区间

$\overline{X} - 1.96\sqrt{1/5}$ —— μ 的置信下限

$\overline{X} + 1.96\sqrt{1/5}$ —— μ 的置信上限

$1-\alpha$ —— 置信度

4

若测得 一组样本值, 算得 $\overline{x} = 1.86$

则得一区间　$(1.86 - 0.877, 1.86 + 0.877)$

它可能包含 μ 的真值，也可能不包含μ 的真值

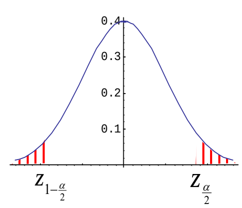
反复抽样得到的区间中有95%包含 μ 的真值.

$\boxed{\text{为什么要取 } z_{\alpha/2}\text{?}}$

当置信区间为$\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5},\ \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}\right)$时

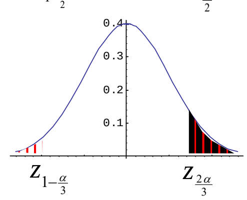
区间的长度为 $2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1/5}$ ——— 达到最短

5



取　$\alpha = 0.05$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 - (-1.96) = 3.92$$



$$z_{\frac{2\alpha}{3}} - z_{1-\frac{\alpha}{3}} = 1.84 - (-2.13) = 3.97$$

6

置信区间的定义

设 θ 是一个待估计的参数, α 是一给定的数, ($0<\alpha<1$). 若能找到两个统计量

$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

使得 $P(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2)=1-\alpha \qquad \theta\in\Theta$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为参数 θ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间, 分别称$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$为置信下限与置信上限, $1-\alpha$称为置信水平或置信度.

7

几点说明

- 置信区间的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 反映了估计的精度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 越小, 估计的精度越高.
- α 反映了估计的可靠程度, α 越小, 越可靠. α 越小, $1-\alpha$ 越大, 估计的可靠程度越高,但这时,$\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 往往增大, 因而估计的精度降低.
- α 确定后, 置信区间 的选取方法不唯一 , 常选最小的一个.

8

- 在求参数的置信区间时, 一般先保证可靠性. 在保证可靠性的基础上, 再提高精度. 通常, 增大样本容量可以提高精度.

9

求置信区间的步骤

- 寻找一个样本的函数

$g(X_x,X_2,\cdots,X_n,\theta)$ — 称为枢轴量

它含有待估参数, 不含其它未知参数, 它的分布已知, 且分布不依赖于待估参数 (常由θ的点估计出发考虑).

例如 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{5}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{1/5}}=g(X_1,X_2,\cdots,X_n,\mu)\sim N(0,1)$$

10

- 给定置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a , b ,使得

$$P(a<g(X_1,X_2,X_n,\theta)<b)=1-\alpha$$

(引例中$a=-1.96, b=1.96$)

- 由$a<g(X_1,X_2,X_n,\theta)<b$ 解出

$\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $\quad\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

得置信区间$(\underline{\theta},\ \bar{\theta})$

引例中,

$$(\underline{\theta},\ \bar{\theta})=(\bar{X}-1.96\sqrt{1/5},\ \ \bar{X}+1.96\sqrt{1/5})$$

11

置信区间常用公式

(一) 一个正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的情形

(1) 方差σ^2已知, μ的置信区间

$$(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

推导 由 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 选取枢轴量

$$g(X_1,X_2,\cdots,X_n,\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

12

由 $P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha$ 确定 $z_{\frac{\alpha}{2}}$

解 $\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}$

得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

13

(2) 方差σ^2未知，μ的置信区间

$$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\ \cdots\cdots\cdots\ (2)$$

推导　选取枢轴量 $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由 $P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha$ 确定 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

故 μ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

14

(3) 当 μ 已知时，方差σ^2的 置信区间

取枢轴量 $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，由概率

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=1-\alpha$$

得 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 置信区间为

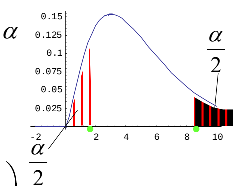
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)\ \cdots\cdots\cdots\ (3)$$

15

(4) 当 μ 未知时，方差σ^2的置信区间

选取 $K=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　则由

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$



得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)\ \cdots\cdots\cdots\ (4)$$

16

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 μ 已知。

则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为__________。

(A) $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$；(B) $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{3}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{2\alpha}{3}}(n-1)}\right)$；

(C) $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$；(D) $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{3}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{3}}(n-1)}\right)$。

17

例　某工厂生产一批滚珠，其直径 X 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从某天的产品中随机抽取6件，测得直径为

15.1，14.8，15.2，14.9，14.6，15.1

(1) 若σ^2=0.06，求 μ 的置信度为95%的 置信区间;

(2) 若σ^2未知,求 μ 的置信度为95%的置信区间;

(3) 求方差σ^2的置信度为95%的置信区间.

解 (1)　$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{0.06}{6})$　即 $N(\mu,0.01)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{0.1}\sim N(0,1)\qquad z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$$

18

由给定数据算得 $\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=14.95$

由公式 (1) 得 μ 的置信区间为

$$(14.95-1.96\times0.1,\quad 14.95+1.96\times0.1)$$
$$=(14.75,\quad 15.15)$$

(2) 取 $T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$ 查表得 $t_{0.025}(5)=2.5706$

由给定数据算得 $\bar{x}=14.95$

$$s^2=\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2\right)=0.051.\quad s=0.226$$

19

由公式 (2) 得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5),\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{6}}t_{0.025}(5)\right)$$
$$=(14.71,\quad 15.187)$$

(3) 选取枢轴量 $K=\frac{5S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(5)$ $\quad s^2=0.051.$

查表得 $\chi^2_{0.025}(5)=12.833,\quad \chi^2_{0.975}(5)=0.831$

由公式 (4) 得 μ 的置信区间为

$$\left(\frac{5s^2}{\chi^2_{0.025}(5)},\quad \frac{5s^2}{\chi^2_{0.975}(5)}\right)=(0.0199,\quad 0.3069)$$

20

(二) 两个正态总体的情形

设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为取自总体 X 样本

设 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 为取自总体 Y 样本

设 $\bar{X},S_1^2$；$\bar{Y},S_2^2$

分别表示两个样本的均值与方差

设置信度为 $1-\alpha$

21

(1) σ_1^2,σ_2^2 已知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}),\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{m})$$

$\bar{X},\bar{Y}$ 相互独立，

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m})$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}},(\bar{X}-\bar{Y})+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right)$$

22

(2) σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m})$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n+m-2)$$

因此

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)$$

23

$$P\left(\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

24

(3) σ_1^2,σ_2^2 未知, 但 *n*, *m* > 50, （大容量情形）

求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

$$\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}\approx\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}$$

$$\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$$

$\bar X,\bar Y$ 相互独立, 因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar X-\bar Y)\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}\right)$$

(4) σ_1^2,σ_2^2 未知, 但 *n* = *m* , $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

令 $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1,2,\ldots, n$, 可以将它们看成来自正态总体 $Z \sim N(\mu_1-\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ 的样本

$$\bar Z=\bar X-\bar Y,$$

$$S_Z^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-Y_i)-(\bar X-\bar Y)\right]^2$$

仿单个正态总体公式, $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar X-\bar Y)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt n}\right)$$

(5) 方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间 (μ_1,μ_2 未知)

取枢轴量

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(n-1,m-1)$$

因此, 方差比 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)}\right)$$

例 某厂利用两条自动化流水线罐装番茄酱. 现分别从两条流水线上抽取了容量分别为13与17的两个相互独立的样本

$$X_1,X_2,\cdots,X_{13}\text{与 }Y_1,Y_2,\cdots,Y_{17}$$

已知 $\bar x=10.6g,\quad \bar y=9.5g,$

$s_1^2=2.4g^2,\quad s_2^2=4.7g^2$

假设两条流水线上罐装的番茄酱的重量都服从正态分布, 其均值分别为 μ_1与 μ_2

(1) 若它们的方差相同, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 求均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为0.95 的置信区间;

(2) 若不知它们的方差是否相同, 求它们的方差比的置信度为 0.95 的置信区间

解 (1) 取枢轴量

$$\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)$$

查表得 $t_{0.025}(28)=2.0484$

$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\left((\bar X-\bar Y)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\right)$$

$$=(-0.3545,\ 2.5545)$$

(2) 枢轴量为

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\frac{S_1^2}{S_2^2}}{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}\sim F(12,16)$$

查表得 $F_{0.025}(12,16)=2.89$

$$F_{0.975}(12,16)=\frac{1}{F_{0.025}(16,12)}\approx\frac{1}{3.16}$$

因此, 方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.025}(n-1,m-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{0.975}(n-1,m-1)}\right)$$

$$=(0.1767,\ 1.6136)$$

(二) 单侧置信区间

定义 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, θ是待估参数

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的样本,

若能确定一个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ (或 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$)

使得 $P(\underline{\theta}<\theta)=1-\alpha$ (或 $P(\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$)

则称 $(\underline{\theta},+\infty)$ (或 $(-\infty,\overline{\theta})$)

为置信度为1 - α 的单侧置信区间.

$\underline{\theta}$—— 单侧置信下限 $\overline{\theta}$—— 单侧置信上限

31

例 已知灯泡寿命X服从正态分布, 从中随机地抽取 5 只作寿命试验, 测得寿命为

1050 , 1100 , 1120 , 1250 , 1280 (小时)

求灯泡寿命均值的置信度为0.95的单侧置信下限与灯泡寿命方差的置信度为0.95的单侧置信上限.

解 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知

$$n=5,\ \bar{x}=1160,\ s^2=\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x})=9950$$

32

(1) 选取枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(4)$

$$t_\alpha(4)=t_{0.05}(4)=2.1318$$

$$\underline{\mu}=\bar{x}-t_{0.05}\times\frac{s}{\sqrt{5}}=1064.9$$

(2) 选取枢轴量 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(4)$

$$\chi^2_{0.95}(4)=0.711$$

$$\overline{\sigma^2}=\frac{4s^2}{\chi^2_{0.95}(4)}=55977$$

33

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_9$是取自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差。如果 $P(\overline{X}>\mu+kS)=0.95$, 则参数 $k=$__________。

34

(四) 非正态总体的情形

若总体 X 的分布未知, 但样本容量很大, 由中心极限定理, 可近似地视 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

若 σ^2 已知, 则 μ 的置信度为1 - α 的置信区间可取为

$$\overline{X}\pm u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

若 σ^2 未知, 则 μ 的置信度为1 - α 的置信区间可取为

$$\overline{X}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

35

例 已知 X 服从参数为 p 的0-1分布,

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为样本,

$n>50$, 求 p 的置信度为 1 – α 的置信区间

解 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)\Rightarrow\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\sim N(0,1)\quad(近似)$$

$$P(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}<u_{\frac{\alpha}{2}})\approx1-\alpha$$

$$0\le\frac{n(\overline{X}-p)^2}{p(1-p)}<u_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

$$\Rightarrow(n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)p^2-(2n\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)p+n\overline{X}^2<0$$

36

令 $a=(n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2), b=-(2n\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2), c=n\overline{X}^2$

$$p_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ p_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

可得，参数 p 的置信区间为(p_1, p_2)

例如，自一大批产品中抽取了**100**个样品，其中有**60**个一级品，求这批产品的一级品率 p 的置信度为**0.95**的置信区间.

$$n=100,\ \bar{x}=0.6,\ \alpha=0.05,\ u_{0.025}=1.96$$

$$a=100+1.96^2=103.84$$

$$b=-(2\times100\times0.6+1.96^2)=-123.84$$

$$c=100\times0.6^2=36$$

p 的置信区间为 $(p_1,p_2)=(0.50,0.69)$

37